Janvier 2019
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Définir : sous-ensemble **convexe** de IR^n. Que signifie géométriquement cette définition ? (1 pt.)

b) Soient les sous-ensembles suivants de IR^2 :

$$A = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\} \qquad \text{et} \qquad B = [-1,1] \times]-2,1[\quad .$$

Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier avec précision les réponses des cases grisées.

	ouvert	fermé	borné	convexe
A	non	oui	oui	oui
B	non	non	oui	oui

Représenter avec précision l'ensemble C = A \ B (ou A – B).
Cet ensemble est-il convexe ? Justifier soigneusement. (3 pts.)

2. Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$, point intérieur de D.

a) Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi….

Que signifie géométriquement la notion de différentiabilité en un point d'une fonction de $IR^2 \to IR$?
(1 pt.)

b) Soit $f(x,y) = \begin{cases} e^{2y} + x & \text{si } y < 0 \\ -3x + 1 + \ln(1+x) & \text{si } y = 0 \\ y^2 & \text{si } y > 0 \end{cases}$.

Etudier la dérivabilité de f(x,y) par rapport à x et par rapport à y **en (0,0)**. (2.5 pts.)

3. a) Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** α ($\alpha \in IR$). (0.5 pt.)

b) Soient les fonctions $f : IR^2 \to IR$ et $h : IR^2 \to IR$ telles que:

- f est différentiable et homogène de degré β dans IR^2
- h est différentiable et homogène de degré λ dans IR^2

Soit la fonction $w(p,q) = f(p.h(p,q), q^3)$.

1°) Déterminer, si possible, les valeurs réelles de β et λ pour lesquelles w est homogène de degré 1 dans IR^2 (détailler les calculs et justifier les étapes).

2°) Donner, sans justification, l'expression **complète** de $\frac{\partial w}{\partial p}(p,q)$ et de $\frac{\partial w}{\partial q}(p,q)$.

(2.5 pts.)

4. Enoncer et démontrer (en détaillant !) la **formule des accroissements finis** pour une fonction f de $IR^n \to IR$ différentiable au voisinage d'un point $\overline{x}$.

(2 pts.)

5. Soient $f : D \subset IR^2 \to IR$ et $g : D \subset IR^2 \to IR$.

a) Enoncer et démontrer le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. (2.5 pt.)

b) Expliquer (en français !!) comment on interprète le multiplicateur de Lagrange dans le problème d'optimisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = c. (0.5 pt.)

c) Soient $f(x,y) = (x-1)^2 - (y+2)^2$ et $g(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 1$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0. Classer ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s). (3.5 pts.)

6. Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 2.y' - 3.y = 5.e^{-x}$.

$$\boxed{y = C_1.e^{-x} + C_2.e^{3x} - \frac{5}{4}x.e^{-x} \quad \forall C_1, C_2 \in IR}$$

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

Un sous-ensemble A de IR^n est **convexe** ssi $\forall x,y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in A$.
Géométriquement, A est convexe s'il contient entièrement les segments de droites délimités par deux quelconques de ses points.

Réponse question 1 b)

On a $A = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\}$ et $B = [-1,1]\ x\ ]-2,1[$.

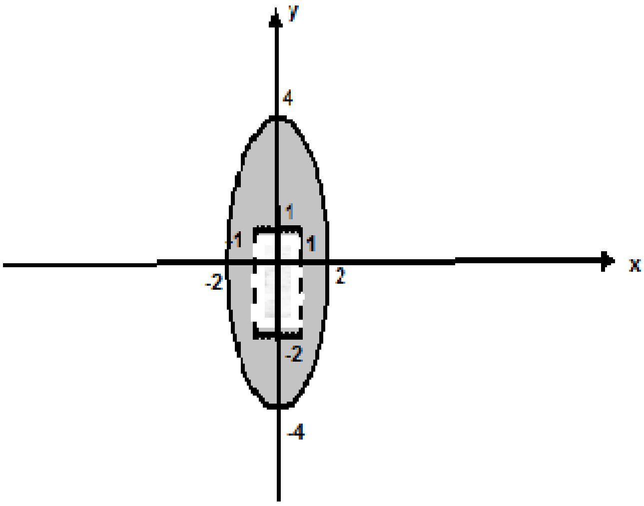
	ouvert	fermé	borné	convexe
A	non	oui	oui	oui
B	non	non	oui	oui

<u>Justifications</u> :

A est borné car la boule ouverte de centre (0,0) et de rayon 10, par exemple, contient entièrement A.

B n'est pas fermé car le point (0,1), par exemple, n'appartient pas à B, mais est adhérent à B puisque toute boule ouverte centrée en (0,1) contient inévitablement des points (0, 1-ε) avec $\varepsilon > 0$ et tel que 1-ε > -2, donc, des points appartenant à B.

Graphiquement, l'ensemble C = A \ B :



<u>Légende</u> : lignes pointillées et zones blanches n'appartennent pas à C.

C n'est pas convexe. puisque les points P(-2,0) et Q(2,0), par exemple, appartiennent à C et $\lambda = \frac{1}{2}$ appartient à [0,1], mais $\lambda.P + (1-\lambda).Q = \frac{1}{2}.(-2,0) + \frac{1}{2}.(2,0) = (0,0)$ qui n'appartient pas à C.

Réponse question 2 a)

Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et a = (x_0, y_0) point intérieur de D.

f est une fonction différentiable en a ssi

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|} = 0}$$

La notion de différentiabilité d'une fonction de $IR^2 \to IR$ en un point signifie géométriquement qu'il existe un plan tangent à la surface correspondante en ce point.

Réponse question 2 b)

On a f(x,y) = $\begin{cases} e^{2y}+x & \text{si } y<0 \\ -3x+1+\ln(1+x) & \text{si } y=0 \\ y^2 & \text{si } y>0 \end{cases}$.

(1) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à x</u>** en (0,0)

On a $\lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{-3x+1+\ln(1+x)-(1)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{-3x+\ln(1+x)}{x}$.

Comme $\lim_{x\to0}(-3x+\ln(1+x))=0$ et $\lim_{x\to0} x = 0$ (lim. fct C° en x = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de x = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim_{x\to0} \frac{(-3x+\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to0} \frac{(-3+\frac{1}{1+x})}{1} = -2$ (lim. fct C° en x = 0) qui $\in \overline{IR} \Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ = -2.

Cette limite étant réelle, **la fonction est dérivable par rapport à x en (0,0) et** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2$ **.**

(2) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à y</u>** en (0,0)

On a $\lim_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$. Etant donnée que la fonction f est définie différemment pour les y < 0 et les y > 0, il faut calculer séparément $\lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ et $\lim_{\substack{y\to0 \\ >}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$.

On a $\lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{e^{2y}-1}{y}$.

Comme $\lim_{\substack{y\to0 \\ <}}(e^{2y}-1)=0$ et $\lim_{\substack{y\to0 \\ <}} y = 0$ (lim. fct C° en y = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de y = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{(e^{2y}-1)'}{y'} = \lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{2e^{2y}}{1} = 2$ (lim. fct C° en y = 0) qui $\in \overline{IR} \Rightarrow \lim_{\substack{y\to0 \\ <}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ = 2.

On a $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{y^2-1}{y}$.

Or, $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}}(y^2-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} y = 0$ (lim. fct C° en y = 0), donc, le calcul de limite $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{y^2-1}{y}$ aboutit sur un calcul dans $\overline{IR}$, $\frac{-1}{0}$ dont le numérateur est < 0 et le dénominateur est > 0, donnant donc comme résultat $-\infty$. Comme ce n'est pas un réel, $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ n'existe pas dans IR, donc, $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ n'existe pas dans IR, donc, **f n'est pas dérivable par rapport à y en (0,0)**.

Réponse question 3 a)

Une fonction f:$IR^n \to IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de IR^n ssi

pour tout $x \in A$ et tout t > 0 : tx $\in$ A et f(tx) = t^α f(x).

Réponse question 3 b)

On a les fonctions f : $IR^2 \to IR$ et h : $IR^2 \to IR$ telles que:

- f est différentiable et homogène de degré β dans IR^2
- h est différentiable et homogène de degré λ dans IR^2

et la fonction w(p,q) = $f(p\,.\,h(p,q),q^3)$.

1°) Pour que w(p,q) soit homogène de degré 1 dans IR^2, il faut (et il suffit) que

$\forall (p,q) \in IR^2, \forall t > 0, t(p,q) \in IR^2$ (évident) et w(t(p,q)) = t^1.w(p,q). On a

$$
\begin{aligned}
w(t(p,q)) &= w(tp,tq) \\
&= f((tp)\,.\,h(tp,tq),(tq)^3) && \text{definition de w} \\
&= f(tp\,.\,h(t(p,q),t^3q^3) \\
&= f(tp\,.\,t^\lambda h(p,q),t^3q^3) && \text{puisque h est homogène de degré } \lambda \text{ dans } IR^2 \\
&= f(t^{\lambda+1}p.h(p,q),t^3q^3)
\end{aligned}
$$

Pour pouvoir mettre en évidence une puissance de t (et utiliser l'homogénéité de f), il faut que

$$\lambda + 1 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Pour $\lambda = 2$, on a alors

$$
\begin{aligned}
w(t(p,q)) &= f(t^3(p.h(p,q),q^3)) \\
&= (t^3)^\beta f(p.h(p,q),q^3) && \text{puisque f est homogène de degré } \beta \text{ dans } IR^2 \\
&= t^{3\beta}.f(p.h(p,q),q^3) \\
&= t^{3\beta}.w(p,q)
\end{aligned}
$$

Pour que w soit homogène de degré 1 dans IR^2, on doit avoir $3\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$.

Par conséquent, **w(p,q) est homogène de degré 1 dans** IR^2 **ssi** $\lambda = 2$ **et** $\beta = \frac{1}{3}$

2°) On a $w(p,q) = f(\underbrace{p.h(p,q)}_{x},\underbrace{q^3}_{y})$

$$\frac{\partial w}{\partial p}(p,q) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(p.h(p,q),q^3\right).[h(p,q) + p.\frac{\partial h}{\partial p}(p,q)] \text{ et}$$

$$\frac{\partial w}{\partial q}(p,q) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(p.h(p,q),q^3\right).p.\frac{\partial h}{\partial q}(p,q) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(p.h(p,q),q^3\right).3q^2 .$$

Réponse question 4

Théorème (ou formule) des accroissements finis pour une fonction f de $IR^n \to IR$ différentiable au voisinage d'un point $\bar{x}$

Soit $f:IR^n \to IR: x \to f(x)$ differentiable sur une boule ouverte centrée en $\bar{x}$ et v ($\in IR^n$), un accroissement donné à $\bar{x}$.
Alors, $\forall v \in IR^n, v \neq 0$ tel que $\bar{x} + v$ appartient encore à cette boule, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) = <v,\nabla f(\bar{x}+\tau v)> = \sum_{i=1}^{n} v_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+\tau v).$$

Autrement dit, il existe ξ entre $\bar{x}$ et $\bar{x}$+v tel que $f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$.

Preuve:

Soit F(t) = $f(\bar{x}+tv)$. Par les hypothèses posées (f est différentiable….), F(t) est dérivable sur [0,1], donc également continue sur [0,1].
On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis (pour les fonctions d'une variable) à la fonction F(t) sur l'intervalle [0,1] : il existe donc $\tau \in (0,1)$ tel que
F(1) – F(0) = F'(τ).(1-0) $\Leftrightarrow$ F(1) – F(0) = F'(τ).

On a immédiatement, F(1) = $f(\bar{x}+v)$ et F(0) = $f(\bar{x})$, d'où il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) = F'(\tau).$$

Calculons F'(t). Comme F(t) = $f(\bar{x}+tv) = f(\underbrace{\bar{x}_1+tv_1}_{x_1},\underbrace{\bar{x}_2+tv_2}_{x_2},.....,\underbrace{\bar{x}_n+tv_n}_{x_n})$, les hypothèses permettent d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
\text{On a } F'(t) &= \frac{d}{dt}[\ f(\bar{x}_1+tv_1,\bar{x}_2+tv_2,.....,\bar{x}_n+tv_n)\ ] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv).\frac{d(\bar{x}_1+tv_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv).\frac{d(\bar{x}_2+tv_2)}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv).\frac{d(\bar{x}_n+tv_n)}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv).v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv).v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv).v_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv).v_i
\end{aligned}$$

Par conséquent, F'(τ) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+\tau v).v_i$.

On peut donc conclure qu'il existe $\tau \in (0,1)$ tel que $f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+\tau v)$.

Réponse question 5 a) **(Théorème de Lagrange)**

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont C^1 au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, si f admet un extremum local en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, alors il existe un réel λ^* tel que $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda^* \nabla g(\bar{x},\bar{y})$ (autrement dit, alors il existe un réel λ^* tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$, avec $L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$).

<u>Preuve</u> :

Hypothèses : f et g sont C^1 au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de D (1)

$\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0 \Leftrightarrow (\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})) \neq (0,0)$. Supposons, par exemple, $\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ (2)

f(x,y) possède un extremum sous la contrainte g(x,y) = 0 $\Rightarrow g(\bar{x},\bar{y}) = 0$ (3)

Thèse: il existe un réel λ^* tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel λ^* tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases}$.

Par l'hypothèse (2), l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda . \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ possède une solution unique λ^*.

Il reste à vérifier que ce λ^* vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda . \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

Les hypothèses (1), (2) et (3) permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation g(x,y) = 0 au voisinage du point $(\bar{x},\bar{y})$: dans ce voisinage, g(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ y = h(x) (notamment, $\bar{y} = h(\bar{x})$), où h est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\bar{x}$.

- Dans ce voisinage, g(x,h(x)) = 0.

En dérivant les deux membres de cette dernière égalité par rapport à x, on obtient $\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x)).h'(x) = 0$, et, pour x = $\bar{x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [1]

- Aussi, f(x,y) possédant un extremum en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, on peut dire que la fonction d'une variable F(x) = f(x,h(x)) possède un extremum <u>libre</u> en $\bar{x}$, d'où F'($\bar{x}$) = 0 (condition nécessaire du premier ordre).

Or, F'(x) = $\frac{d}{dx}(f(x,h(x))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x)).h'(x)$, d'où

F'($\bar{x}$) = 0 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [2]

En prenant [2] - λ^*.[1] pour le réel unique λ^* tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$, on a

$(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}))$ - λ^*.$(\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x})) = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})) + (\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})).h'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ ce qui achève la démonstration.

Réponse question 5 b)

Le **multiplicateur de Lagrange** λ^*, dans le problème d'optimisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = c, s'interprète comme la variation marginale de l'optimum de la fonction f lorsque le « niveau » (c) de la contrainte g(x,y) = c augmente d'une unité.

Réponse question 5 c)

On a f(x,y) = $(x-1)^2-(y+2)^2$ et g(x,y) = $(x-1)^2+(y+2)^2-1$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

<u>Domaines de définition</u> : $\text{dom } f = \text{dom } g = \text{IR}^2$

<u>Classes</u> : f et g sont C^∞ sur IR² (f et g sont des fonctions polynômes)

Posons $L(x,y;\lambda) = (x-1)^2-(y+2)^2-\lambda((x-1)^2+(y+2)^2-1)$

<u>Condition nécessaire</u> (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

<u>Types de candidats</u> : parmi les points de $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à $\text{dom } f \cap \text{dom } g$: néant car $\text{dom } f \cap \text{dom } g = \text{IR}^2$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas C^1 : néant car f et g sont C^∞ sur IR^2.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(y+2)\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla g(x,y) = \left[2(x\text{-}1) \quad 2(y\text{+}2)\right] = [0 \quad 0] \text{ ssi } (x,y) = (1,-2)$$

, mais (1,-2) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x-1)-2\lambda(x-1) = 0\\ -2(y+2)-2\lambda(y+2) = 0\\ -((x-1)^2+(y+2)^2-1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x-1)(1-\lambda) = 0 & (1)\\ -2(y+2)(1+\lambda) = 0 & (2)\\ (x-1)^2+(y+2)^2-1 = 0 & (3)\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } \lambda = 1$

Si x = 1, par (3), $(y+2)^2 = 1 \Leftrightarrow y+2 = 1$ ou $y+2 = -1 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = -3$.

Dans les deux cas, par (2), $\lambda = -1$.

Si $\lambda = 1$, par (2), y = -2, donc, par (3), $(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1$ ou $x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 0$.

On a donc quatre candidats :

(1,-1) et (1,-3) avec λ^* = -1 ; (2,-2) et (0,-2) avec λ^* = 1.

Classement (par la **conditions suffisante** de la **"Hessienne bordée"** relative à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0) :

Si f et g sont C^2 au voisinage de a, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(a) \neq 0$, et si il existe un réel λ^* tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,\lambda^*) = 0$, alors,

si dét $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(a,\lambda^*)} > 0$ (resp. < 0) ,

f présente en a un maximum (resp. minimum) local sous la contrainte g(x,y)=0.

On a ici $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = 2 - 2\lambda$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = -2 - 2\lambda$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = 0$ et

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(y+2)$.

On doit donc évaluer dét $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ en les 4 candidats.

Pour (1,-1) avec λ^* = -1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16 et pour (1,-3) avec λ^* = -1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16

d'où, **f(x,y) possède un minimum local en (1,-1) et en (1,-3) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

Pour (2,-2) avec λ^* = 1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16 et pour (0,-2) avec λ^* = 1, dét $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16

d'où, **f(x,y) possède un maximum local en (2,-2) et en (0,-2) sous la contrainte g(x,y) = 0**.