Août 2018
(1 heure et 45 minutes)

1. **a)** Définir : - matrice **inversible**
- matrice **orthogonale** (1 pt.)

b) Soit A une matrice inversible de IR^{nxn}, $n \in IN_0$.
Démontrer que son inverse à gauche et son inverse à droite sont égales. (1.5 pt.)

c) Soient A et B $\in IR^{nxn}$, $n \in IN_0$.
Remplacer dans chacune des phrases suivantes **.......................................** par « ***est toujours*** » ou « ***est parfois*** » ou « ***n'est jamais*** ».

si A est orthogonale, alors A ***est toujours*** inversible

si A est symétrique, alors A ***est parfois*** inversible

si A.B est inversible, alors A ***est toujours*** inversible

si A.B est non inversible, alors A ***est parfois*** inversible

Justifier soigneusement **deux** de ces affirmations **au choix**.

(Pour une réponse « est toujours » ou « n'est jamais », justifier de manière théorique ; pour une réponse « est parfois », donner un exemple de chaque cas). (2.5 pts.)

2. **a)** Définir : **système de Cramer**. (0.5 pt.)

b) Si A.X = B est un système de Cramer, que peut-on dire de ses éventuelles solutions ? <u>Ne pas démontrer</u>. (0.5 pt.)

c) Soit le système linéaire $\begin{cases} x+2y+3z & =-1 \\ 3x+7y+z & = 2 \\ 5x+11y+7z & = 0 \end{cases}$.

1°) Résoudre ce système.

2°) Peut-on déduire de la réponse de 1°) si c'est un système de Cramer ? Justifier. (2 pts.)

3. **a)** Soient $n \in IN_0$ et $E \subset IR^{nx1}, E \neq \varnothing$.

Définir: - vecteurs **linéairement indépendants** de IR^{nx1}
- **VCT(E)** (le vectoriel engendré par E)**.** (1 pt.)

b) Démontrer que si E est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, tout vecteur de VCT(E) s'obtient d'une et une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs de E. (1.5 pt.)

c) Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\alpha \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$ de IR^{3x1}, avec $\alpha \in IR$.

1°) Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de α, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement <u>dépendants</u>?

2°) Pour <u>une</u> des valeurs (au choix) obtenues au 1°), déterminer une base du vectoriel engendré par $E = \left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$ ainsi que sa dimension.

Justifier soigneusement. (2.5 pts.)

4. **a)** Définir : - **polynôme caractéristique** d'une matrice M de IR^{nxn}. (0.5 pt.)
- matrice **diagonalisable dans IR** (0.5 pt.)

b) Soit $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les **valeurs** propres de M. **Pour chacune** de ces valeurs propres, déterminer les vecteurs propres associés. (3 pts.)

5. Donner (réponse finale uniquement)

a) dans $\mathbb{C}$,

une solution (au choix) de $z^2 = 1 + 2\sqrt{2}.i$ $\boxed{\sqrt{2} + i}$

(0.5 pt.)

le module de la solution donnée $\boxed{\sqrt{3}}$ (0.5 pt.)

b) la solution générale de la RLACC (récurrence linéaire à coefficients constants)

$$Y_{t+1} = \frac{1}{3}.Y_t + 3^t$$

$$\boxed{Y_t = C.(\frac{1}{3})^t + \frac{3}{8}.3^t \qquad \forall C \in IR}$$

(1 pt.)

c) dans IR^{4x1} muni du produit scalaire et de la norme standards,

- deux vecteurs orthogonaux sans composante nulle $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e t } \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ (0.5 pt.)

- un vecteur normé sans composante nulle $\boxed{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$ (0.5 pt.)

Réponse question 1 a)

Soit A $\in IR^{nxn}$. A est **inversible** s'il existe B,C $\in IR^{nxn}$ telles que : A.B = C.A = I_n .
B est alors *inverse à droite* et C, *inverse à gauche* de A.

Soit A $\in IR^{nxn}$. A est **orthogonale** ssi A.A' = I_n.

Réponse question 1 b)

Soit $A \in IR^{n\times n}$ inversible.
Soit $B \in IR^{n\times n}$, son inverse à droite $\Leftrightarrow A.B = I_n$.
Soit $C \in IR^{n\times n}$, son inverse à gauche $\Leftrightarrow C.A = I_n$.
Considérons le produit C.A.B

D'une part :

$$\begin{aligned} C.A.B &= (C.A).B && \text{(associativité du produit matriciel)} \\ &= I_n.B && \text{(car C inverse à gauche de A)} \\ &= B && \text{(propriété de la matrice unité (neutre pour le produit matriciel))} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} C.A.B &= C.(A.B) && \text{(associativité du produit matriciel)} \\ &= C.I_n && \text{(car B inverse à droite de A)} \\ &= C && \text{(propriété de la matrice unité (neutre pour le produit matriciel))} \end{aligned}$$

Et donc, $B = C$

Réponse question 1 c)

On a A et B $\in IR^{nxn}$, n $\in IN_0$.

si A est orthogonale, alors A ***est toujours*** inversible

si A est symétrique, alors A ***est parfois*** inversible

si A.B est inversible, alors A ***est toujours*** inversible

si A.B est non inversible, alors A ***est parfois*** inversible

Justifications :

(1) si A est orthogonale, alors A ***est toujours*** inversible.

En effet, A est **orthogonale** ssi A.A' = I_n, donc A est inversible à droite. Or, une matrice inversible à droite est inversible.

(2) si A est symétrique, alors A ***est parfois*** inversible.

En effet, la matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est symétrique et non inversible (son déterminant vaut 0), tandis que la matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est symétrique et inversible (son déterminant vaut -1, donc est non nul).

Réponse question 2 a)

Un **système de Cramer** est un système linéaire A.X = B tel que A est une matrice (carrée) inversible.

Réponse question 2 b)

Si A.X = B est un système de Cramer, il possède une et une seule solution donnée par $X = A^{-1}.B$.

Réponse question 2 c)

On a $\begin{cases} x+2y+3z & =-1 \\ 3x+7y+z & = \ 2 \\ 5x+11y+7z & = \ 0 \end{cases}$.

1°) La matrice augmentée du système est $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. Réduisons-la :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5.L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2.L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19 & -11 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est sous forme échelonnée ligne réduite. De là,

(1) le système est compatible (la réduite de sa matrice augmentée n'a pas de pivot en dernière colonne)

(2) x et y sont des inconnues principales, z est une inconnue secondaire

Le système a une infinité de solutions données par

$$S = \left\{ (x,y,z) \in IR^3 : \ \begin{cases} x = -11 - 19.z \\ y = 5 + 8.z \end{cases} \ \forall z \in IR \right\}.$$

2°) Le système n'est pas un système de Cramer puisqu'il a une infinité de solutions alors que, comme indiqué au b) ci-dessus, un système de Cramer a une solution unique.

Réponse question 3 a)

Des vecteurs de IR^{nx1} sont **linéairement indépendants** ssi la seule combinaison linéaire de ces vecteurs donnant le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Soit E, un sous-ensemble de IR^{nx1}, $n \in IN_0$.
VCT(E), le **vectoriel engendré par E**, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de E.

Réponse question 3 b)

Soit E est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants d'un vectoriel réel V. Alors, tout vecteur du vectoriel engendré par E s'obtient d'une et une seule manière comme combinaison linéaire des vecteurs de E.

Preuve :

Soit E = $\left\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},....,\overrightarrow{w_m}\right\}$, un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de V. Soit $\vec{w} \in \text{VCT(E)}$.

On a $\vec{w} = a_1.\overrightarrow{w_1} + a_2.\overrightarrow{w_2} + ... + a_m.\overrightarrow{w_m}$ avec $a_i \in$ IR $\forall$ i.

Supposons, par l'absurde, que $\vec{w} = b_1.\overrightarrow{w_1} + b_2.\overrightarrow{w_2} + ... + b_m.\overrightarrow{w_m}$.

On a $\sum_{i=1}^{m} a_i.\overrightarrow{w_i} = \sum_{i=1}^{m} b_i.\overrightarrow{w_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i.\overrightarrow{w_i} + (-\sum_{i=1}^{m} b_i.\overrightarrow{w_i}) = \vec{0}$ car V,+ est un groupe commutatif.

En utilisant les propriétés du signe $\sum$, on a $\sum_{i=1}^{m}(a_i.\overrightarrow{w_i} - b_i.\overrightarrow{w_i}) = \vec{0}$ et, par les propriétés de la multiplication scalaire, on a $\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i).\overrightarrow{w_i} = \vec{0} \Leftrightarrow (a_1 - b_1).\overrightarrow{w_1} + (a_2 - b_2).\overrightarrow{w_2} + ... + (a_m - b_m).\overrightarrow{w_m} = \vec{0}$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},....,\overrightarrow{w_m}$ sont linéairement indépendants, donc, nécessairement,

$(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) = ... = (a_m - b_m) = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_m = b_m$ ce qui démontre que $\vec{w}$ s'écrit de manière <u>unique</u> comme combinaison linéaire des vecteurs de E.

Réponse question 3 c)

On a les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2\alpha \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$ de IR^{3x1}, avec $\alpha \in IR$.

1°) Ces vecteurs sont linéairement dépendants ssi la matrice M = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$ est de rang < 3,

donc ssi dét(M) = 0.

On a dét(M) = (Sarrus) $\alpha^2 + 4\alpha + 2\alpha^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 = 2\alpha - \alpha^2 = \alpha(2-\alpha)$. De là,

les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ssi dét(M) = 0 ssi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

2°) Prenons $\alpha = 0$. On a E = $\left\{ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \right\}$ = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Pour déterminer une base de VCT(E), on place les composantes des vecteurs de E horizontalement

dans une matrice P = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que l'on réduit :

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\1&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix} L_2\leftarrow L_2/(-2)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-2.L_2\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite et, par conséquent, une base de VCT(E) est, par exemple, $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$**.**

De là, puisqu'une telle base contient deux vecteurs, **la dimension de VCT(E) est 2.**

Réponse question 4 a)

Soit une matrice carrée $M\in IR^{nxn}$, $n \in IN_0$:
Son **polynôme caractéristique** est un polynôme de degré n en la variable λ égal à

$$\text{dét}\left(M-\lambda.I_n\right).$$

M est **diagonalisable dans IR** ssi il existe une matrice inversible C de IR^{nxn} telle que $C^{-1}.M.C$ est diagonale.

Réponse question 4 b)

On a $M=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1\end{bmatrix}$.

Recherche des valeurs propres de M

Les valeurs propres de M sont les solutions de $\text{dét}\,(M-\lambda I_2)=0$

$$\Leftrightarrow \text{dét}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}-\lambda&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1-\lambda\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow(\frac{1}{3}-\lambda)(-1-\lambda)-\frac{5}{3}.\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}-\frac{5}{9}=0\Leftrightarrow\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda-\frac{8}{9}=0$$

$$\lambda=\frac{-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{32}{9}}}{2}\Leftrightarrow\lambda=\frac{-\frac{2}{3}\pm\frac{6}{3}}{2}\Leftrightarrow\lambda=-\frac{4}{3}\text{ ou }\lambda=\frac{2}{3}.$$

M possède deux valeurs propres $\lambda=-\frac{4}{3}$ et $\lambda=\frac{2}{3}$.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda=-\frac{4}{3}$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda=-\frac{4}{3}$ sont les vecteurs $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in IR^{2x1}$ tels que

$$M.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-\frac{4}{3}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Leftrightarrow(M+\frac{4}{3}.I).\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{3}.x+\frac{1}{3}y&=0\\ \frac{5}{3}.x+\frac{1}{3}y&=0\end{cases}\Leftrightarrow\{y=-5x\quad\forall\ x\in IR$$

L'ensemble des solutions du système est $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^{2x1} : \{y = -5x \quad \forall\, x \in IR\right\}$ ou encore $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.x : x \in IR\right\}$

dont une base est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = \frac{2}{3}$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = \frac{2}{3}$ sont les vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^{2x1}$ tels que

$$M.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{2}{3}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow (M - \frac{2}{3}.I).\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}.x + \frac{1}{3}y & = 0 \\ \frac{5}{3}.x - \frac{5}{3}y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y \quad \forall\, y \in IR$$

L'ensemble des solutions du système est $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^{2x1} : \{x = y \quad \forall\, y \in IR\right\}$ ou encore $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.y : y \in IR\right\}$

dont une base est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.