Août 2018
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Soit $m,n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Compléter <u>de deux manières différentes</u> : la suite $(p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots)$ de IR^n converge vers p ssi **………**
Donner un exemple d'une suite divergente de IR^2. Justifier. (1.5 pt.)

b) Démontrer que le produit cartésien de n ensembles fermés de IR est un ensemble fermé de IR^n.
(1.5 pt.)

c) Soient les sous-ensembles suivants de IR^2 :

$$A = [-1,1] \times [1,4[\quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in IR^2 : x-y \le 1 \text{ et } x-y > -3\}.$$

Représenter avec précision les ensembles A et B (deux graphiques séparés).
Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier <u>avec précision</u> les réponses des cases grisées.

	ouvert	fermé	borné
A	non	non	oui
B	non	non	non

(3 pts.)

2. Soit $f: D \subset IR^2 \to IR: (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$, point intérieur de D.

a) Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi…. (0.5 pt.)

b) Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5.\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(1) Etudier la dérivabilité de la fonction f(x,y) <u>en (0,0)</u>

(2) Etudier la différentiabilité de la fonction f(x,y) <u>en (0,0)</u>

<u>Ne pas étudier la continuité</u> !! (2.5 pts.)

3. a) Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** α ($\alpha \in IR$). (0.5 pt.)

b) Soit $f(x,y) = \sqrt[m]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^m}$ avec $m \in IR$.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m la fonction f(x,y) est-elle homogène dans $(IR_0^+)^2$? Quel est, dans chaque cas, le degré d'homogénéité correspondant ?
Justifier soigneusement. (2.5 pts.)

4. a) Enoncer la **condition nécessaire du premier ordre** relative aux extrema libres des fonctions de plusieurs variables. (<u>Ne pas démontrer</u>) (0.5 pt.)

b) Enoncer et <u>démontrer</u> la **condition suffisante du second ordre** relative aux extrema libres des fonctions de plusieurs variables. (2.5 pts.)

c) Soit $f(x,y) = (x+2).e^{-x}.(y-3)$.

1°) Déterminer le(s) "candidat(s)" extremum de f(x,y). Classer ceux-ci (maximum, minimum ou ni l'un, ni l'autre). Justifier soigneusement en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s).

2°) Déterminer le(s) "candidat(s)" extremum de f(x,y) si les variables x et y sont soumises aux contraintes $x \ge 0$ et $y \ge 0$. Classer ce(s) candidat(s). <u>Ne pas énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s)</u>.
(3.5 pts.)

5. Déterminer (réponse finale uniquement)

a) la solution générale de l'équation différentielle $y' + 6xy = 8x.e^{(x^2)}$.

$$\boxed{y = e^{x^2} + C.e^{-3x^2} \quad \forall C \in IR}$$

(1 pt.)

b) l'<u>équation</u> du plan tangent à la surface d'équation z = $(y+1).(1+\ln(1+2x))$ en le point (0,0).

$$\boxed{z = 1 + y + 2x}$$

(0.5 pt.)

Réponse question 1 a)

La suite $(p_1, ..., p_m, ...)$ de IR^n **converge** vers $p \in IR^n$

ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in IN : m > N \Rightarrow d(p_m, p) < \varepsilon$

ssi la suite réelle $(d(p_1,p), d(p_2,p), \ldots, d(p_m,p), \ldots)$ converge vers 0.

La suite $\left((n,1)\right)_{n \in IN_0}$ de IR^2 diverge puisqu'une suite $\left((x_n, y_n)\right)_{n \in IN_0}$ de IR^2 converge ssi les deux suites réelles $(x_n)_{n \in IN_0}$ et $(y_n)_{n \in IN_0}$ convergent toutes deux. Or, la suite réelle $(n)_{n \in IN_0}$ diverge.

Réponse question 1 b)

Le produit cartésien de n ensembles fermés de IR est un ensemble fermé de IR^n

<u>Preuve</u> :

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n ensembles fermés de IR.

Soit A = $A_1 x A_2 x....x A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$.

Montrons que A est un ensemble fermé de IR^n.

Prenons une suite $(p_1, p_2, ..., p_m, ...)$ convergente (vers p) d'éléments de A. On a

$$\begin{array}{ll}
p_1 & (x_1, y_1, ..., z_1) \in A \\
p_2 & (x_2, y_2, ..., z_2) \in A \\
\vdots & \ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
p_m & (x_m, y_m, ..., z_m) \in A \\
\vdots & \ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
\downarrow & \ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
p & (\bar{x}, \ \bar{y}, ..., \ \bar{z})
\end{array}$$

la suite de A_1 $(x_1, x_2, ..., x_m, ...)$ converge vers $\bar{x}$. Or, A_1 est fermé, donc $\bar{x} \in A_1$

la suite de A_2 $(y_1, y_2, ..., y_m, ...)$ converge vers $\bar{y}$. Or, A_2 est fermé, donc $\bar{y} \in A_2$

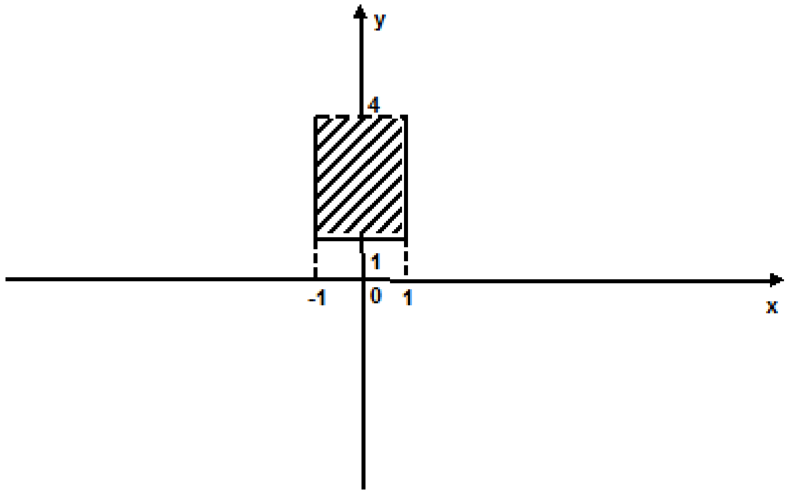
.....

la suite de A_n $(z_1, z_2, ..., z_m, ...)$ converge vers $\bar{z}$. Or, A_n est fermé, donc $\bar{z} \in A_n$.

Conclusion : p $(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}) \in A$ et A est bien un ensemble fermé de IR^n.

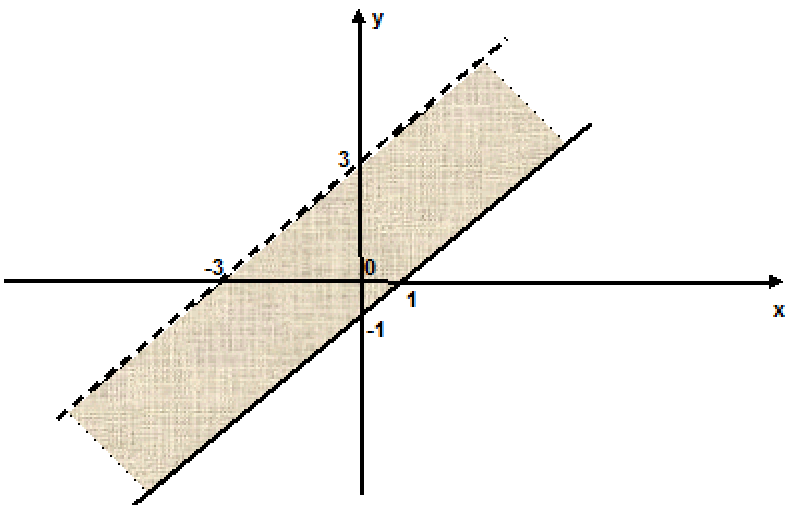
Réponse question 1 c)

L'ensemble $A = [-1,1] \times [1,4[$



Légende : lignes pointillées n'appartenent pas à A ; lignes pleines et zone hachurée appartiennent à A.

L'ensemble $B = \{(x,y) \in IR^2 : x - y \leq 1 \text{ et } x - y > -3\}$



Légende : lignes pointillées n'appartenent pas à B ; lignes pleines et zone grisée appartiennent à B.

	ouvert	fermé	borné
A	non	non	oui
B	non	non	non

Justifications :

(1) A n'est pas ouvert puisque le point (1,1), par exemple, appartient à A, mais n'est pas point intérieur de A (toute boule ouverte centrée en (1,1) contient inévitablement des points dont l'abscisse est supérieure à 1, donc n'appartenant pas à A).

(2) B n'est pas fermé puisque le pont (0,3), par exemple, n'appartient pas à B, mais lui est adhérent (toute boule ouverte centrée en (0,3) contient des points de coordonnées ($0,3-\varepsilon$), avec $0 < \varepsilon < 4$, donc des points de B).

Réponse question 2 a)

. Soit $f: D \subset IR^2 \rightarrow IR: (x,y) \rightarrow f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$, point intérieur de D.

f est une fonction différentiable en a
ssi

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

Réponse question 2 b)

On a $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5.\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(1) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) en (0,0)

Dérivabilité par rapport à x en (0,0)

Il faut calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt[3]{x^2}} - 0}{x} = 0 \in IR$.

De là, f(x,y) est dérivable par rapport à x en (0,0) et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Dérivabilité par rapport à y en (0,0)

Il faut calculer $\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{5.\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^2}} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{5y}{y} = 5 \in IR$.

De là, f(x,y) est dérivable par rapport à y en (0,0) et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5$.

(2) Etude de la différentiabilité de la fonction f(x,y) en (0,0).

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-5k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{5.\sqrt[3]{k^5}}{\sqrt[3]{h^2+k^2}} - 5k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{5.\sqrt[3]{k^5} - 5k.\sqrt[3]{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}.\sqrt[3]{h^2+k^2}}$. En posant $\begin{cases} h = \rho.\cos\theta \\ k = \rho.\sin\theta \end{cases}$, on a $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{5.\sqrt[3]{k^5} - 5k.\sqrt[3]{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}.\sqrt[3]{h^2+k^2}} =$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta \text{ qcq}}} \frac{5.\sqrt[3]{\rho^5.\sin^5\theta} - 5.\rho.\sin\theta.\sqrt[3]{\rho^2}}{\rho.\sqrt[3]{\rho^2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta \text{ qcq}}} \frac{5.\rho^{\frac{5}{3}}(\sqrt[3]{\sin^5\theta} - \sin\theta)}{\rho^{\frac{5}{3}}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta \text{ qcq}}} 5.(\sqrt[3]{\sin^5\theta} - \sin\theta).$$

Cette limite n'existe pas puisque le calcul dépend de la valeur de θ, donc sa valeur n'est pas 0, et, par conséquent, **f nest pas différentiable en (0,0)**.

Réponse question 3 a)

Une fonction $f:IR^n \to IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de IR^n ssi

pour tout $x \in A$ et tout $t > 0$: $tx \in A$ et $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$.

Réponse question 3 b)

On a $f(x,y) = \sqrt[m]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^m}$ avec $m \in IR$.

1°) Tout d'abord, $\forall (x,y) \in (IR_0^+)^2, \forall t > 0 : t(x,y) = (tx,ty) \in (IR_0^+)^2$.

On a $\forall (x,y) \in (IR_0^+)^2, \forall t > 0 : f(t.(x,y)) = f(tx,ty) = \sqrt[m]{(tx)^3.(ty)^7} - \dfrac{3.(tx)^7}{(ty)^m} = \sqrt[m]{t^3x^3.t^7y^7} - \dfrac{3.t^7x^7}{t^my^m}$

$= \sqrt[m]{t^{10}x^3.y^7} - t^{7-m}\dfrac{3.x^7}{y^m} = t^{\frac{10}{m}}.\sqrt[m]{x^3.y^7} - t^{7-m}.\dfrac{3.x^7}{y^m}$. Pour que f(x,y) soit homogène, il faut pouvoir mettre une puissance de t en evidence dans cette expression, donc, il faut que

$\dfrac{10}{m} = 7 - m \Leftrightarrow -m^2 + 7m - 10 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 10 = 0$.

De là, $m = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$ donc, $m = 2$ ou $m = 5$.

Si $m = 2$, on a $f(x,y) = \sqrt[m]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^m} = \sqrt{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^2}$ et

$\forall (x,y) \in (IR_0^+)^2, \forall t > 0$, $f(tx,ty) = = t^{\frac{10}{2}}.\sqrt{x^3.y^7} - t^{7-2}.\dfrac{3.x^7}{y^2} = t^5.(\sqrt{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^2}) = t^5.f(x,y)$

et **f est homogène de degré 5**.

Si $m = 5$, on a $f(x,y) = \sqrt[m]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^m} = \sqrt[5]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^5}$ et

$\forall (x,y) \in (IR_0^+)^2, \forall t > 0$, $f(tx,ty) = = t^{\frac{10}{5}}.\sqrt[5]{x^3.y^7} - t^{7-5}.\dfrac{3.x^7}{y^5} = t^2.(\sqrt[5]{x^3.y^7} - \dfrac{3.x^7}{y^5}) = t^2.f(x,y)$

et **f est homogène de degré 2**.

Réponse question 4 a)

Soit $f: \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}: x \to f(x)$.

Si f est dérivable en a, point intérieur de dom f, et si f admet un extremum local en a, alors,

$\forall i \in \{1,\cdots,n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Réponse question 4 b)

Si $f: D \subset \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ est C² au voisinage de $\bar{x}$, point interieur de D et point critique de f, si la hessienne $H_f(\bar{x})$ est définie négative (resp. positive), alors f possède un maximum (resp. minimum) local en $\bar{x}$. Si $H_f(\bar{x})$ n'est ni semi-définie positive, ni semi-définie négative, alors f ne possède pas d'extremum en $\bar{x}$ ($\bar{x}$ est un "point de selle").

<u>Preuve</u>:

comme f est C^2 au voisinage de $\bar{x}$, point intérieur à D, on peut écrire la formule de Taylor:

$f(\bar{x}+v) = f(\bar{x}) + \left\langle v, \nabla f(\bar{x}) \right\rangle + \frac{1}{2}.v^t.H_f(\bar{x}).v + R_2(v)$ où $\frac{R_2(v)}{\|v\|^2} \to 0$ si $\|v\| \to 0$.

On en déduit $f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}.v^t.H_f(\bar{x}).v + R_2(v)$ puisque $\bar{x}$ est point critique de f.

Si $f(\bar{x}+v) - f(\bar{x}) \geq 0$ (resp. ≤ 0) $\forall$ v au voisinage de 0, alors f est minimum (resp. maximum) en $\bar{x}$:

on étudie le signe de $\frac{1}{2}.v^t.H_f(\bar{x}).v + R_2(v)$ au voisinage de 0, mais avec $v \neq 0$.

Alors $\|v\| \neq 0$ et ce signe est celui de $\frac{1}{2}.\frac{v^t}{\|v\|}.H_f(\bar{x}).\frac{v}{\|v\|} + \frac{R_2(v)}{\|v\|^2}$.

Ainsi, la forme quadratique $Q(y) = y^t.H_f(\bar{x}).y$ est calculée sur un vecteur de norme 1 ($y = \frac{v}{\|v\|}$), et elle est non nulle.

Mais cette forme quadratique est une fonction continue sur $\mathbb{IR}^n$, et l'ensemble des vecteurs de norme 1 forme un ensemble compact: la forme quadratique est bornée et atteint ses bornes sur ce compact.

Soit, par exemple, la forme quadratique définie positive: son maximum M et son minimum m sont strictement positifs sur le compact (valeur d'une forme quadratique d.p. > 0 pour des vecteurs non nuls).

Par conséquent, $\frac{f(\bar{x}+v) - f(\bar{x})}{\|v\|^2} \geq \frac{1}{2}m + \frac{R_2(v)}{\|v\|^2}$

Mais, $\frac{R_2(v)}{\|v\|^2} \to 0$ si $\|v\| \to 0$ donc pour $\varepsilon = \frac{m}{4}$, il existe $\delta > 0$:

$\|v\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{R_2(v)}{\|v\|^2}\right| < \varepsilon$, c'est-à-dire $-\frac{m}{4} < \frac{R_2(v)}{\|v\|^2} < \frac{m}{4}$ quand $\|v\| < \delta$.

Dans ce cas, $\frac{f(\bar{x}+v) - f(\bar{x})}{\|v\|^2} > \frac{1}{2}m - \frac{m}{4} = \frac{m}{4} > 0$ pour $\|v\| < \delta$ qui est un voisinage de 0.

La démonstration est analogue quand la forme quadratique est définie négative ou dans le cas du point de selle.

Réponse question 4 c)

On a f(x,y) = $(x+2).e^{-x}.(y-3)$.

Domaine de définition : dom f = IR^2 (pas de condition d'existence)

« Classe » de f :
f est de classe C^∞ sur dom f comme produit de

1) $(x+2).(y-3)$: fonction polynôme C^∞ sur IR^2, donc C^∞ sur $\text{dom} f$.
2) e^{-x} : composée d'une fonction polynôme (-x) et d'une fonction exponentielle e^u, respectivement C^∞ sur dom f et sur IR, donc C^∞ sur dom f.

Par la condition nécessaire du premier ordre (voir réponse question 4 a)) *:*

Types de candidats :

1) Les éventuels points de dom f où f n'est pas dérivable : néant car f est C^∞ sur dom f ;
2) Les éventuels points de dom f non intérieurs à dom f : néant car dom f est ouvert ;
3) Les éventuels points critiques de f, c'est-à-dire les éventuelles solutions ($\in \text{dom} f$) du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{-x}-(x+2).e^{-x}).(y-3)=0 \\ (x+2).e^{-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}(-x-1).(y-3)=0 & [1] \\ (x+2).e^{-x}=0 & [2] \end{cases}$$

De [2], x = -2 nécessairement, d'où, par [1], y = 3.

Il y a donc un seul candidat extremum: $(-2,3)$.

Classement par la condition suffisante du second ordre (voir réponse question 4 b))

comme f(x,y) est C^∞ sur dom f, on a

$$\forall (x,y)\in \text{dom} f : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=e^{-x}.x.(y-3) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=e^{-x}.(-x-1) \end{cases} \Rightarrow H_f(x,y)=\begin{pmatrix} e^{-x}.x.(y-3) & e^{-x}.(-x-1) \\ e^{-x}.(-x-1) & 0 \end{pmatrix}$$

En $(-2,3)$, on a donc $H_f(-2,3)=\begin{pmatrix} 0 & e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme le déterminant de cette matrice (son second mineur) vaut $-e^4$, est donc négatif, elle est indéfinie et on peut donc conclure que **la fonction ne possède ni maximum, ni minimum en** $(-2,3)$ (elle y posède un "point de selle").

2°) La recherche des candidats extremum de f(x,y) = $(x+2).e^{-x}.(y-3)$ si les variables x et y sont soumises aux contraintes x $\geq$ 0 et y $\geq$ 0, correspond à la recherche des éventuelles solutions du système

$$\begin{cases} x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.e^{-x}(-x-1).(y-3)=0 & [1] \\ y.(x+2).e^{-x}=0 & [2] \end{cases}$$

De [2], y = 0 ou x = -2, mais la contrainte x $\geq$ 0 impose de rejeter x = -2. De là, par [1], x = 0 ou x = - 1 (qui est à rejeter puisque x est soumise à la contrainte x $\geq$ 0).

Le seul candidat extremum sous contrainte est donc (0,0).

Pour ce point, les variables x et y sont de « type I » (égale à 0 et x soumise à une contrainte de positivité).

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ = 3 > 0 et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$= 2 > 0.

Par conséquent, f admet en (0,0) un minimum local sous les contraintes x $\geq$ 0 et y $\geq$ 0.