Août 2018
(1 heure et 45 minutes)

1. a) Soit A, sous-ensemble non vide de IR.
Définir: - point **adhérent** de A
- sous-ensemble **fermé** de IR (1 pt.)

b) Démontrer que toute intersection d'ensembles fermés de IR est un ensemble fermé de IR. (1.5 pt.)

c) Compléter le tableau suivant. Ne pas justifier.

Rappel : l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un ensemble sont des ensembles !

E	Adhérence E	Intérieur E	Frontière E
IN_0	IN_0	$\varnothing$	IN_0
$IR^+ \setminus \{1\}$	IR^+	$IR_0^+ \setminus \{1\}$	$\{0,1\}$
$]-1\,,\,5] \cup \{7\}$	$[-1\,,\,5] \cup \{7\}$	$]-1\,,\,5[$	$\{-1,5,7\}$
$]-\infty\,,\,-5]$	$]-\infty\,,\,-5]$	$]-\infty\,,\,-5[$	$\{-5\}$

(2.5 pts.)

2. a) Qu'appelle-t-on **suite réelle convergente**? Qu'appelle-t-on **suite réelle divergente**?

Quelles sont toutes les possibilités pour la limite d'une suite réelle **divergente**?
Donner, sans justification, un exemple de chaque cas. (2 pts.)

b) Sachant que $(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle divergente et que $(w_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle convergente, remplacer **………………..** par "**est parfois**", "**est toujours**" ou "**n'est jamais**".

Justifier **une** réponse au choix.

(Pour une réponse « est toujours » ou « n'est jamais », justifier théoriquement, pour une réponse « est parfois », donner un exemple de chaque cas).

(1) la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in IN_0}$ **……………………………..** convergente

(2) la suite $(u_n + w_n)_{n\in IN_0}$ **……………………………..** convergente

(2 pts.)

3. a) Définir : - fonction **dérivable** en un point
- fonction **bornée** sur un domaine A
- **maximum global** d'une fonction (1.5 pt.)

b) Enoncer et démontrer la condition nécessaire du premier ordre relative aux extrema d'une fonction f(x), dans le cas d'un maximum. (2 pts.)

c) Soit $f(x) = |x|.e^{2x}$.

1°) Après avoir déterminé son domaine de définition, étudier la continuité et la dérivabilité de f(x).

2°) Déterminer f '(x), la fonction dérivée de f(x).

3°) Déterminer les « candidats » extremum de f(x). Classer ceux-ci (maximum local, minimum local ou ni l'un, ni l'autre) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s). (4 pts.)

4. Donner (réponse finale uniquement)

a) pour la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(5-x)}{x-2}$.

-son domaine de définition $\boxed{]-\infty,5[\setminus\{2\}}$

- l'<u>équation</u> de la tangente à la courbe y = f(x) en son point d'abscisse x = 4.

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + 2}$$

(1 pt.)

b) pour la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^2}$

l'<u>équation</u> d'une asymptote (indiquer $\nexists$ si elle n'existe pas)

verticale $\boxed{\nexists}$

horizontale du côté de $+\infty$ $\boxed{y = 0}$

horizontale du côté de $-\infty$ $\boxed{y = 0}$

(1.5 pt.)

c) les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ de la fonction $f(t,u) = (u^2+t).e^{2t-u}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = e^{2t-u}.(1+2u^2+2t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(t,u) = e^{2t-u}.(2u-u^2-t)}$$

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

Soit A, un sous-ensemble non vide de IR.

Un point a est dit **adhérent** à A ssi il existe une suite de points de A qui converge vers a.

A $\subset$ IR est un sous-ensemble **fermé** de IR

ssi A = adh A (A contient tous ses points adhérents)
ssi toute suite d'éléments de A qui converge dans IR converge dans A
ssi son complémentaire est ouvert.

Réponse question 1 b)

Toute intersection d'ensembles fermés de IR est un ensemble fermé de IR

Preuve

[Rappelons d'abord qu'un ensemble A est fermé ssi toute suite convergente d'éléments de A converge dans A]

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots$ des ensembles fermés. Soit $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$

Soit une suite convergente d'éléments de A. Les éléments de cette suite appartiennent à chaque A_i.

Or, chaque A_i est fermé (hypothèse). Par conséquent, la limite de cette suite appartient à chaque A_i.

La limite de cette suite appartient donc à A, l'intersection des fermés A_i.

Réponse question 1 c)

E	Adhérence E	Intérieur E	Frontière E
IN_0	IN_0	$\emptyset$	IN_0
$IR^+ \setminus \{1\}$	IR^+	$IR_0^+ \setminus \{1\}$	{0,1}
$]-1, 5] \cup \{7\}$	$[-1, 5] \cup \{7\}$	$]-1, 5[$	{-1,5,7}
$]-\infty, -5]$	$]-\infty, -5]$	$]-\infty, -5[$	{-5}

Réponse question 2 a)

Une suite réelle **convergente** est une suite réelle qui possède une limite finie (réelle).

Une suite réelle **divergente** est une suite réelle qui ne converge pas.

La limite d'une suite **divergente** peut être égale à $+\infty$ ou à $-\infty$ ou ne pas exister dans $\overline{IR}$.

Exemple 1 : la suite $(2^n)_{n\in IN_0}$ est une suite divergente de limite $+\infty$.
Exemple 2 : la suite $(-n)_{n\in IN_0}$ est une suite divergente de limite $-\infty$.
Exemple 3 : la suite $((-1)^n)_{n\in IN_0}$ ne possède pas de limite dans $\overline{IR}$.

Réponse question 2 b)

La suite $(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle <u>divergente</u> et la suite $(w_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle <u>convergente</u>.

(1) la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\in IN_0}$ **.. est parfois..** convergente
(2) la suite $(u_n + w_n)_{n\in IN_0}$ **.. n'est jamais..** convergente

Justification de (2) :

Posons $v_n = u_n + w_n \quad \forall n \in IN_0$.

Supposons, par l'absurde, que la suite $(v_n)_{n\in IN_0}$ converge.

Alors, comme $u_n = v_n - w_n \quad \forall n \in IN_0$, la suite $(u_n)_{n\in IN_0}$ serait convergente comme différence des deux suites convergentes $(v_n)_{n\in IN_0}$ et $(w_n)_{n\in IN_0}$, ce qui est absurde puisqu'elle est, par hypothèse, divergente !

Réponse question 3 a)

Soit f: D $\rightarrow$ IR: x $\rightarrow$ f(x) et a, un point intérieur de D.
f est **dérivable** en a ssi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans IR.

Soit f: D $\rightarrow$ IR: x $\rightarrow$ f(x).
La fonction f est **bornée** sur $A \subset D$ ssi l'ensemble f(A) est borné (majoré et minoré).

Soit f : IR $\rightarrow$ IR : x $\rightarrow$ f(x) et a $\in$ dom f.

f possède un **maximum global** en a ssi $\forall$ x $\in$ dom f : f(a) ≥ f(x).

Réponse question 3 b)

Condition nécessaire du premier ordre :

Soit f: D $\to$ IR: x$\to$ f(x) et a, un point intérieur de D.
Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a,
Alors f '(a) = 0.

Preuve

Si f est maximum en a, par exemple, alors f(a) $\geq$ f(x) $\forall x$ appartenant à un voisinage V de a ;

dans ce voisinage, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (pour x $\neq$ a) possède un numérateur $\leq$ 0, et un dénominateur > 0 ou < 0 selon que x > a ou x < a.

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif à gauche de a et négatif à droite de a.

De là, la dérivée à gauche de f en a est positive et la dérivée à droite de f en a est négative (ces deux dérivées existent en a puisque f est dérivable en a).

Etant donné que la dérivée de f en a existe par hypothèse, ces dérivées à gauche et à droite sont égales et f '(a) est donc nulle.

Réponse question 3 c)

On a f(x) = $|x|.e^{2x}$.

1°) Le domaine de définition de cette fonction est IR (pas de condition d'existence).

La fonction est continue dans IR comme produit de $|x|$, continue dans IR et de e^{2x}, composée de 2x, fonction polynôme, continue dans IR et de e^u, continue dans IR, donc continue dans IR.

En ce qui concerne la dérivabilité de f(x), on a f(x) = $\begin{cases} -x.e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x.e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(a) dans l'ouvert $(-\infty,0)$, f(x) = $-x.e^{2x}$ qui est dérivable dans IR comme produit de (-x), fonction polynôme, dérivable dans IR et de e^{2x}, composée de 2x, fonction polynôme, dérivable dans IR et de e^u, dérivable dans IR, donc dérivable dans IR.

(b) dans l'ouvert $(0,+\infty)$, f(x) = $x.e^{2x}$ qui est dérivable dans IR comme produit de x, fonction polynôme, dérivable dans IR et de e^{2x}, composée de 2x, fonction polynôme, dérivable dans IR et de e^u, dérivable dans IR, donc dérivable dans IR.

(c) en x = 0, on a

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{-x.e^{2x}-0}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} -e^{2x} = -e^0$ (lim. fct. C° en x = 0) = **-**1.

Comme cette limite est réelle, **la fonction f est dérivable à gauche en x = 0** et $f_g'(0) = -1$.

Egalement,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x.e^{2x}-0}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} e^{2x} = e^0$ (lim. fct. C° en x = 0) = 1.

Comme cette limite est réelle, **la fonction f est dérivable à droite en x = 0** et $f_d'(0) = 1$.

Comme $f_g'(0) \neq f_d'(0)$, **la fonction f n'est pas dérivable en x = 0**.

La fonction f(x) est donc dérivable dans IR_0 et pas en x = 0.

2°) de 1°) (et les règles de dérivation), on a f '(x) = $\begin{cases} -(1+2x).e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ (1+2x).e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

3°) Recherche des extrema de f(x)

Les "candidats" extremum de f sont, parmi les points de dom f,

a) les éventuels points critiques de f(x) : il y en a un seul : x = $-\frac{1}{2}$;
b) les éventuels points en lesquels f(x) n'est pas dérivable : il y en a un seul x = 0 ;
c) les éventuels points qui ne sont pas intérieurs à dom f : il n'y en a pas ici puisque le domaine de définition de f est ouvert.

On a le théorème suivant :

> Si f(x) est continue en a et s'il existe un $\eta > 0$ tel que
>
> $\forall$ x $\in$ (a-η,a) $\cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) $\geq$ 0 ($\leq$ 0) et
> $\forall$ x $\in$ (a,a+η) $\cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) $\leq$ 0 ($\geq$ 0)
>
> Alors, f(x) possède un maximum (minimum) local en a.

Comme la fonction étudiée ici est continue dans dom f et dérivable dans dom f sauf au point x = 0, l'étude du signe de f '(x) au voisinage des points candidats extremum nous permettra d'étudier la croissance de f(x) et de conclure.

x		$-\frac{1}{2}$		0	
f '(x)	+	0	-	$\nexists$	+

Le théorème cité ci-dessus nous permet d'affirmer que la fonction étudiée possède un

maximum local en x = $-\frac{1}{2}$ de valeur $\frac{1}{2e}$, et un **minimum local en x = 0** de valeur 0.

Réponse question 4

a) pour la fonction f(x) = $\dfrac{\ln(5-x)}{x-2}$.

-son domaine de définition $\boxed{]-\infty,5[\setminus\{2\}}$

- l'<u>équation</u> de la tangente à la courbe y = f(x) en son point d'abscisse x = 4.

$$\boxed{y=-\frac{x}{2}+2}$$

b) pour la fonction f(x) = $\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^2}$

l'<u>équation</u> d'une asymptote (indiquer $\nexists$ si elle n'existe pas)

verticale $\boxed{\nexists}$

horizontale du côté de $+\infty$ $\boxed{y=0}$

horizontale du côté de $-\infty$ $\boxed{y=0}$

c) les derivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ de la fonction f(t,u) = $(u^2+t).e^{2t-u}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)=e^{2t\text{-}u}.(1+2u^2+2t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)=e^{2t\text{-}u}.(2u-u^2-t)}$$

VERSION B

a) les derivées partielles $\frac{\partial f}{\partial w}(w,p)$ et $\frac{\partial f}{\partial p}(w,p)$ de la fonction f(w,p) = $(w^2+p).e^{3p-w}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial w}(w,p) = e^{3p\text{-}w}.(2w - w^2 - p)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p}(w,p) = e^{3p\text{-}w}.(1+3w^2+3p)}$$

b) pour la fonction f(x) = $\frac{\ln(6-x)}{x-3}$.

-son domaine de définition $\boxed{]-\infty,6[\setminus \{3\}}$

- l'<u>équation</u> de la tangente à la courbe y = f(x) en son point d'abscisse x = 5.

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}}$$

c) pour la fonction f(x) = $\frac{\ln(1+5x^2)}{x^2}$

l'<u>équation</u> d'une asymptote (indiquer $\nexists$ si elle n'existe pas)

verticale $\boxed{\nexists}$

horizontale du côté de $+\infty$ $\boxed{y = 0}$

horizontale du côté de $-\infty$ $\boxed{y = 0}$