Mai 2018
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Définir : **système de Cramer**. (0.5 pt.)

b) Démontrer qu'un système de Cramer possède une et une seule solution. (1.5 pt.)

c) Résoudre et discuter en fonction du paramètre réel k le système suivant

$$\begin{cases} x+ky+z = 2 \\ k^2x+(k^3+k-1)y+k^2z = 2k^2+1 \end{cases}$$

(2.5 pts.)

2. a) Citer toutes les opérations élémentaires (permettant de réduire une matrice à sa forme échelonnée ligne réduite). Quel est l'effet de chacune de ces opérations sur le déterminant d'une matrice carrée? (1.5 pt.)

b) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ avec $a,b,c,d,e,f,g,h,i \in IR$.

Sachant que dét(M) = 7, compléter chaque case de la seconde ligne du tableau suivant par la valeur réelle du déterminant de la matrice A. Indiquer **?** s'il n'est pas possible de donner la réponse avec les informations fournies

A	$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ -d & -e & f \\ -g & -h & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d-3a & e-3b & f-3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2a & b & c \\ d & 2e & f \\ g & h & 2i \end{bmatrix}$	$2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
dét(A)	-7	-21	?	56

Justifier soigneusement **<u>deux</u>** réponses au choix. (2 pts.)

3. a) Soit E, un sous-ensemble de IR^{nx1}, $n \in IN_0$.

Définir : vecteurs linéairement **dépendants** de IR^{nx1}
VCT(E) (le vectoriel engendré par E) (1 pt.)

b) Démontrer que des vecteurs sont linéairement dépendants ssi l'un d'entre eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. (1.5 pt.)

c) Soient les vecteurs $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ de IR^{3x1} et $E = \{\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{t}\}$.

1°) Les vecteurs de E sont-ils linéairement indépendants ? Forment-ils une base de IR^{3x1} ?
Déterminer une base de VCT(E) (le vectoriel engendré par E) ainsi que sa dimension.

2°) Le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ appartient-il à VCT(E)? Si oui, quelles sont ses composantes dans la base obtenue au 1°) ci-dessus. Si non, pourquoi ? (2.5 pts.)

4. a) Soit $M \in IR^{nxn}$ avec $n \in IN_0$.

Définir : **valeur propre** de M. (0.5 pt.)

polynôme caractéristique de M (0.5 pt.)

b) Soit M = $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice M. M est-elle diagonalisable dans IR ?

(3 pts.)

5. a) Qu'appelle-t-on le **module** et l'**argument** d'un nombre complexe non nul a+bi? (1 pt.)

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 125$. (1 pt.)

6. Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de la RLACC (récurrence linéaire à coefficients constants)

$$Y_{t+1} = 2.Y_t + t + 5$$

$$\boxed{Y_t = C.2^t - t - 6 \quad \forall C \in IR}$$

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

Un **système de Cramer** est un système linéaire A.X = B tel que A est une matrice carrée inversible.

Réponse question 1 b)

Un système de Cramer A.X = B possède une et une seule solution donnée par $X = A^{-1}.B$.

Preuve :

(1) Existence

Montrons que $X = A^{-1}.B$ est solution de A.X = B.

On a $A.(A^{-1}.B) = (A.A^{-1}).B$ (Associativité du produit matriciel)

$= I_n.B$ (Définition de l'inverse d'une matrice carrée)

$= B$ (I_n est neutre pour le produit matriciel)

(2) Unicité

Soit X_0, une solution de A.X = B. On a donc $A.X_0 = B$. Multiplions le deux membres à gauche par A^{-1} (A inversible puisque A.X = B système de Cramer)

$\Leftrightarrow A^{-1}.(A.X_0) = A^{-1}.B$

$\Leftrightarrow (A^{-1}.A).X_0 = A^{-1}.B$ (Associativité du produit matriciel)

$\Leftrightarrow I_n.X_0 = A^{-1}.B$ (Définition de l'inverse d'une matrice carrée)

$\Leftrightarrow X_0 = A^{-1}.B$ (I_n est neutre pour le produit matriciel)

Réponse question 1 c)

On a $\begin{cases} x + ky + z = 2 \\ k^2x + (k^3 + k - 1)y + k^2z = 2k^2 + 1 \end{cases}$.

Sa matrice augmentée est $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 1 & 2 \\ k^2 & (k^3+k-1) & k^2 & (2k^2+1) \end{array}\right]$.

En réduisant, on a $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 1 & 2 \\ k^2 & (k^3+k-1) & k^2 & (2k^2+1) \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - k^2.L_1 \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 1 & 2 \\ 0 & (k-1) & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Discussion

(1) Si $k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$, la matrice augmentée du système devient

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ et le système est incompatible (il y a un pivot en dernière colonne).

(2) Si $k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$, on continue la réduction de la matrice augmentée du système :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 1 & 2 \\ 0 & (k-1) & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2.\frac{1}{(k-1)} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k-1} \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_1 - k.L_2 \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \frac{k-2}{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k-1} \end{array}\right].$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite. Le système est, dans ce cas, compatible puisqu'il n'y a pas de pivot en dernière colonne et a alors deux inconnues principale : x et y et une inconnue secondaire : z. Le système a une infinité de solutions données par

$$S = \left\{ (x,y,z) \in IR^3 : \quad \begin{cases} x = \dfrac{k-2}{k-1} - z \\ y = \dfrac{1}{k-1} \end{cases} \quad \forall z \in IR \right\}.$$

Réponse question 2 a)

Les **opérations élémentaires** permettant de réduire une matrice à sa forme échelonnée réduite sont :

- la permutation de deux lignes;
- la multiplication d'une ligne par un réel non nul;
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne.

Effet de chacune de ces opérations élémentaires **sur le déterminant** d'une matrice carrée :

- la permutation de deux lignes change le signe du déterminant ;
- la multiplication d'une ligne par un réel non nul multiplie le déterminant par ce réel ;
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne ne change pas le déterminant.

Réponse question 2 b)

On a M = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ avec a,b,c,d,e,f,g,h,i $\in$ IR et dét(M) = 7.

A	$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ -d & -e & f \\ -g & -h & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d-3a & e-3b & f-3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2a & b & c \\ d & 2e & f \\ g & h & 2i \end{bmatrix}$	$2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
dét(A)	-7	-21	?	56

Justifications (par exemple) :

(1) dét $\begin{bmatrix} d-3a & e-3b & f-3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ = -21 car la matrice $\begin{bmatrix} d-3a & e-3b & f-3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ est le résultat de l'application à la matrice M des opérations élémentaires successives « multiplication de la première ligne par (-3) » (qui multiplie le déterminant par (-3)), et « ajout à la première ligne de la seconde ligne » (qui ne change pas le déterminant).

(2) dét $2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ = 56 car la matrice $2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$ est le résultat de l'application à la matrice M des opération élémentaires « multiplication de la première ligne par 2 », « multiplication de la seconde ligne par 2 » et « multiplication de la troisième ligne par 2 ». Chacune de ces opérations ayant pour effet de multiplier le déterminant par 2, le déterminant de la matrice résultante vaut 2x2x2x7, soit 56.

Réponse question 3 a)

Des vecteurs de IR^{nx1} sont **linéairement dépendants** ssi il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs à coefficients <u>non tous nuls</u> donnant le vecteur nul.

Soit E, un sous-ensemble de IR^{nx1}, $n \in IN_0$.
VCT(E), le **vectoriel engendré par E**, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de E.

Réponse question 3 b)

Des vecteurs sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ ***un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres***.

<u>Preuve</u>

Soient n vecteurs $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$ d'un espace vectoriel réel V.

(1) $\Rightarrow$: supposons que ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Par définition, il existe des réels $r_1, r_2, ..., r_n$ <u>non tous nuls</u> tels que $r_1.\overrightarrow{v_1} + r_2.\overrightarrow{v_2} + ... + r_n.\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$.

Supposons, par exemple, $r_1 \neq 0$.

On a, par les propriétés des espaces vectoriels, $r_1.\overrightarrow{v_1} = (-r_2.\overrightarrow{v_2}) + (-r_3.\overrightarrow{v_3}) + ... + (-r_n.\overrightarrow{v_n})$.

Multiplions (scalairement) les deux membres par $(\frac{1}{r_1})$.

On obtient (propriétés de la multiplication scalaire) $\overrightarrow{v_1} = (-\frac{r_2}{r_1}).\overrightarrow{v_2} + (-\frac{r_3}{r_1}).\overrightarrow{v_3} + ... + (-\frac{r_n}{r_1}).\overrightarrow{v_n}$ et le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$.

(2) $\Leftarrow$:Supposons, par exemple, que le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$.

On a $\overrightarrow{v_1} = a_2.\overrightarrow{v_2} + a_3.\overrightarrow{v_3}.... + a_n.\overrightarrow{v_n}$ avec $a_i \in IR \quad \forall i$.

De là, par les propriétés des vectoriels, on a

$\vec{0} = (-\overrightarrow{v_1}) + a_2.\overrightarrow{v_2} + a_3.\overrightarrow{v_3} + ... + a_n.\overrightarrow{v_n} \Leftrightarrow \vec{0} = (-1).\overrightarrow{v_1} + a_2.\overrightarrow{v_2} + a_3.\overrightarrow{v_3} + ... + a_n.\overrightarrow{v_n}$ et, comme $-1 \neq 0$,

il existe une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$ à coefficients non tous nuls donnant le vecteur nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$ sont linéairement dépendants.

Réponse question 3 c)

On a les vecteurs $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ de IR^{3x1} et E = $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}\}$.

1°) Les vecteurs de E sont linéairement dépendants puisque la matrice M = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, contenant (en ligne) les composantes des vecteurs, a un rang inférieur ou égal à 3 (puisque M est de format 4x3), donc, en aucun cas égal à 4, le nombre de vecteurs.

Comme les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, ils ne forment pas une base de IR^{3x1} (et, de plus, ils sont au nombre de 4, alors qu'une telle base doit contenir exactement 3 vecteurs).

Pour déterminer une base de VCT(E), il faut réduire la matrice M :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3.L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{5}.L_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2.L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5.L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5.L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une base de VCT(E) est donc, par exemple, B = $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ et la dimension de VCT(E) est 2.

2°) Pour voir si le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ appartient à VCT(E), il faut déterminer s'il existe des réels a et b tels que $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix}$.

La réponse est positive, puisque a = 3 et b = 2 vérifient cette égalité.

Par conséquent, le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ appartient à VCT(E) et ses composantes dans la base B sont $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Réponse question 4 a)

Le réel λ est une **valeur propre** de la matrice M ssi il existe un vecteur non nul $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in IR^{nx1}$ tel que

$$M.\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda.\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Le **polynôme caractéristique** de M est un polynôme de degré n en la variable λ égal à

$$\text{dét}\left(M - \lambda.I_n\right).$$

Réponse question 4 b)

On a M = $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.Le polynôme caractéristique de M est dét$\begin{bmatrix} \sqrt{2}-\lambda & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{bmatrix}$ =

$(\sqrt{2}-\lambda).\text{dét}\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{bmatrix} = (\sqrt{2}-\lambda).(-1-\lambda).(\sqrt{2}-\lambda) = (\sqrt{2}-\lambda)^2.(-1-\lambda)$.

Ses valeurs propres sont donc $\lambda = \sqrt{2}$ et $\lambda = -1$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = \sqrt{2}$ sont les vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de IR^{3x1} tels que

$M.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sqrt{2}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow (M\text{-}\sqrt{2}.I).\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire les solutions du système

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-\sqrt{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})y & = 0 \\ (-1-\sqrt{2})y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{y = 0 .$$

Le sous-vectoriel des solutions du système est $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in IR^{3x1} : \{y = 0\right\}$ ou encore

$\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : x,z \in IR\right\} = \left\{x.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x,z \in IR\right\}$ dont une base est, par exemple, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = -1$ sont les vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de IR^{3x1}

tels que $M.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1).\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow (M\text{+}I).\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire les solutions du système

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1).x+(1+\sqrt{2}).y & =0 \\ 0 & =0 \\ (\sqrt{2}+1).z & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases} .$$

Le sous-vectoriel des solutions du système est $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in IR^{3\times1} : \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases} \right\}$ ou encore

$\left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in IR \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .y : y \in IR \right\}$ dont une base est tout naturellement $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

En prenant les trois vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, on obtient une base de IR^{3x1} constituée de vecteurs propres de M, donc M **est diagonalisable** dans IR.

Réponse question 5 a)

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe non nul.

Le **module** de z, noté ρ, est la distance de l'origine au point de coordonnées (a,b).

On a donc $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$;

L'**argument** de z, noté θ, est l'angle formé par la demi-droite d'origine (0,0) passant par le point de coordonnées (a,b) et la direction positive de l'axe X. On peut le définir par les relations $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$.

Réponse question 5 b)

On a l'équation $z^3 = 125$ à résoudre dans $\mathbb{C}$.

En supposant la forme trigonométrique de z = ρ.(cosθ + i.sinθ), on a

$$z^3 = 125 \Leftrightarrow \rho^3.(\cos 3\theta + i.\sin 3\theta) = 125.(\cos 0 + i.\sin 0)$$

De là, $\begin{cases} \rho^3 = 125 \text{ (dans IR)} \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \text{ (avec } k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 5 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \text{ (avec k = 0,1,2)} \end{cases}$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 125$ sont donc :

pour k = 0 : $z = 5.(\cos 0 + i.\sin 0) = 5$

pour k = 1 : $z = 5.(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2\pi}{3}) = 5.(-\dfrac{1}{2} + i.\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{5}{2} + i.\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

pour k = 2 : $z = 5.(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i.\sin\dfrac{4\pi}{3}) = 5.(-\dfrac{1}{2} - i.\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{5}{2} - i.\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$