Janvier 2018
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Définir : sous-ensemble **convexe** de IR^n. (0.5 pt.)

b) Déterminer et représenter avec précision, le domaine de définition D de la fonction

$$f(x,y) = \frac{x.\ln y}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2-4}}.$$

D est-il ouvert ? Fermé ? Borné ? Convexe ? Justifier soigneusement vos réponses pour les termes soulignés. (2.5 pts.)

2. Soit $f: D \subset IR^2 \to IR: (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$, point intérieur de D.

a) Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi….

Que signifie géométriquement la notion de différentiabilité en un point d'une fonction de $IR^2 \to IR$? (1 pt.)

b) Soit $f(x,y) = \begin{cases} 3x^2-7 & \text{si } y = 3 \text{ et } x \neq 2 \\ 5+3.\ln(y-2) & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x \neq 2 \text{ et } y \neq 3 \end{cases}$.

Etudier la dérivabilité de f(x,y) **en (2,3)**. (2 pts.)

3. a) Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** α $(\alpha \in IR)$. (0.5 pt.)

b) Enoncer et démontrer (en détaillant la démonstration) le théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes. (1.5 pt.)

c) Soient les fonctions $f: IR^2 \to IR$ et $h: IR \to IR$ telles que:

- f est différentiable dans IR^2 et h est différentiable dans IR;
- f est homogène de degré 2 dans IR^2 et h est homogène de degré (-1) dans IR;

Soit la fonction $F(x) = f(h(x), h(x))$.

1°) La fonction F(x) est-elle homogène dans IR? Si oui, quel est son degré d'homogénéité ? Justifier soigneusement les étapes.

2°) Donner, sans justification, l'expression **complète** de F'(x).

3°) Sachant que f(3 ,3) = -27 ; h(2) = 1 ; h'(2) = -5 ; $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = -3$,

compléter, si possible, chacune des cases vides $\boxed{}$ ci-dessous par le réel correspondant. Indiquer **?** si les données ne permettent pas de donner une réponse. Justifier soigneusement les réponses aux questions (2) et (4).

((1) f(5,5) = $\boxed{-75}$ (2) h(1) = $\boxed{2}$

(3) h'(1) = $\boxed{-20}$ (4) F'(1) = $\boxed{-20}$ (3.5 pts.)

4. Enoncer et démontrer le **théorème de Taylor** pour une fonction f de $IR^n \to IR$ de classe C^2 au voisinage d'un point $\overline{x}$. (2.5 pts.)

5. Soient $f : D \subset IR^2 \to IR$ et $g : D \subset IR^2 \to IR$.

a) Enoncer le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. <u>Ne pas démontrer</u>.

(0.5 pt.)

b) Enoncer la **condition suffisante « forte » du second ordre** relative à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. <u>Ne pas démontrer</u>.

(1 pt.)

c) Soient f(x,y) = $e^{-x^2} - e^{-y^2}$ et g(x,y) = $4x^2 + y^2 - 4$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0. Classer ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s).

(3.5 pts.)

6. Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de l'équation différentielle $y''' - 4.y'' + 4.y' = 8x$.

$$\boxed{y = C_1 + C_2.e^{2x} + C_3.x.e^{2x} + x^2 + 2x \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in IR}$$

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

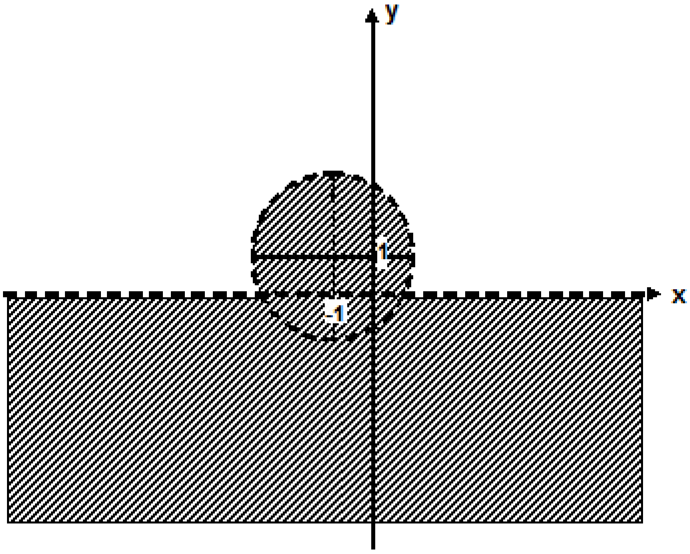
Un sous-ensemble A de IR^n est **convexe** ssi $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

Réponse question 1 b)

On a f(x,y) = $\dfrac{x.\ln y}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4}}$.

On a les conditions d'existence suivantes : y > 0 et $(x+1)^2 + (y-1)^2 - 4 > 0$.

On a donc dom f = $\{(x,y) \in IR^2 : y > 0 \text{ et } (x+1)^2 + (y-1)^2 - 4 > 0\}$.
Graphiquement :



Légende : lignes pointillées et zones hachurées n'appartennent pas à dom f.

Ce domaine de définition est ouvert, n'est pas fermé, n'est pas borné et n'est pas convexe.

Il <u>n'est pas fermé</u> parce que le point (1,1), par exemple, n'appartient pas à dom f, mais toute boule ouverte centrée en (1,1) contient des points (1, 1+ε) avec ε > 0 qui sont différents de (1,1) et appartiennent à ce domaine.

Il <u>n'est pas convexe</u> puisque les points P(-4,1) et Q(2,1), par exemple, appartiennent à dom f et $\lambda = \dfrac{1}{2}$ appartient à [0,1], mais $\lambda.P + (1-\lambda).Q = \dfrac{1}{2}.(-4,1) + \dfrac{1}{2}.(2,1) = (-1,1)$ qui n'appartient pas à dom f.

Réponse question 2 a)

Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et $a=(a_1,a_2)$ point intérieur de D.

f est une fonction différentiable en a ssi

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y)-f(a_1,a_2)-(x-a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)-(y-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} = 0}$$

La notion de différentiabilité d'une fonction de $IR^2 \to IR$ en un point signifie géométriquement qu'il existe un plan tangent à la surface correspondante en ce point.

Réponse question 2 b)

On a $f(x,y) = \begin{cases} 3x^2-7 & \text{si } y = 3 \text{ et } x \neq 2 \\ 5+3.\ln(y-2) & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x \neq 2 \text{ et } y \neq 3 \end{cases}$.

<u>Dérivabilité par rapport à x en (2,3)</u>

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x,3)-f(2,3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7-(5-3.\ln 1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}3(x+2) = 12 .$$

Cette limite étant réelle, la fonction est dérivable par rapport à x en (2,3) et $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 12$.

<u>Dérivabilité par rapport à y en (2,3)</u>

$$\lim_{y\to 3}\frac{f(2,y)-f(2,3)}{y-3} = \lim_{y\to 3}\frac{5+3.\ln(y-2)-5}{y-3} = \lim_{y\to 3}\frac{3.\ln(y-2)}{y-3} .$$

Comme $\lim_{y\to 3} 3.\ln(y-2) = 0$ et $\lim_{y\to 3}(y-3) = 0$ (lim. fct C° en y = 3), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de y = 3, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$$\lim_{y\to 3}\frac{(3.\ln(y-2))'}{(y-3)'} = \lim_{y\to 3}\frac{\frac{3}{y-2}}{1} = 3 \quad \text{qui } \in \overline{IR} \Rightarrow \lim_{y\to 3}\frac{f(2,y)-f(2,3)}{y-3} = 3.$$

Cette limite étant réelle, la fonction est dérivable par rapport à y en (2,3) et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 3$.

Réponse question 3 a)

Une fonction $f:IR^n \to IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de IR^n ssi

pour tout $x \in A$ et tout $t > 0$: $tx \in A$ et $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

Réponse question 3 b)

Proposition **:** si $f: A \subset IR^n \to IR$ est homogène de degré α sur A et différentiable $\forall\ x \in A$, alors $$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x) \quad \text{(Théorème d'Euler)}$$

Preuve:

On considère f(tx) comme fonction de la seule variable t: la fonction $IR \to IR^n$: $t \to tx$ est différentiable partout et le théorème de dérivation des fonctions composées est applicable;
on a $f(tx) = t^\alpha f(x)$ donc

$$\frac{d}{dt}\left[f(tx)\right] = \frac{d}{dt}\left[t^\alpha f(x)\right] \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[f(tx_1,..,tx_n)\right] = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx).\frac{\partial(tx_1)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx).\frac{\partial(tx_2)}{\partial t} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx).\frac{\partial(tx_n)}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx).x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx).x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx).x_n = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).x_i = \alpha t^{\alpha-1} f(x) \text{ que l'on calcule en } t = 1.$$

Réponse question 3 c)

On a les fonctions $f : IR^2 \to IR$ et $h : IR \to IR$ telles que:

- f est différentiable dans IR^2 et h est différentiable dans IR;
- f est homogène de degré 2 dans IR^2 et h est homogène de degré (-1) dans IR;

et la fonction $F(x) = f\left(h(x),h(x)\right)$.

1°) F(x) est définie et différentiable dans IR (c'est la composée de….).

On a $\forall x \in IR, \forall t > 0, tx \in IR$ (évident) et

F(tx)	=	$f\left(h(tx),h(tx)\right)$	definition de F
	=	$f\left(t^{-1}.h(x),t^{-1}.h(x)\right)$	puisque h est homogène de degré (-1) dans IR
	=	$f\left(t^{-1}(h(x),h(x))\right)$	mise en evidence de t^{-1}
	=	$(t^{-1})^2.f\left(h(x),h(x)\right)$	puisque f est homogène de degré 2 dans IR^2
	=	$t^{-2}.f\left(h(x),h(x)\right)$	
	=	$t^{-2}.F(x)$	définition de F

Par conséquent, **F(x) est homogène de degré (-2) dans IR**.

2°) $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[f\left(h(x),h(x)\right)\right]=\frac{\partial f}{\partial x}\left(h(x),h(x)\right).h'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(h(x),h(x)\right).h'(x)$.

3°) On a f(3 ,3) = -27 ; h(2) = 1 ; h'(2) = -5 ; $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=-3$,

(1) f(5,5) = $\boxed{-75}$ (2) h(1) = $\boxed{2}$

(3) h'(1) = $\boxed{-20}$ (4) F'(1) = $\boxed{-20}$

Justification de (2) :

On a h(2) = 1, donc h(2$_x$1) = 1.
Comme h est homogène de degré (-1) sur IR, on a $2^{-1}.h(1)=1\Leftrightarrow h(1)=2$.

Justification de F'(1) = -20 :

On a $F'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(h(x),h(x)\right).h'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(h(x),h(x)\right).h'(x)$, d'où

$F'(1)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(h(1),h(1)\right).h'(1)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(h(1),h(1)\right).h'(1)$ et comme h(1) = 2 et h'(1) = -20,

$$F'(1)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(2,2\right).(-20)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(2,2\right).(-20)=4.(-20)+(-3).(-20)=-20.$$

Réponse question 4

Si $f: IR^n \to IR$ est de classe C^2 sur une boule ouverte B centrée en $\bar{x}$,
alors $\forall v(\neq 0) \in IR^n$ tel que $\bar{x}+v$ appartient encore à cette boule, $\exists \tau \in (0,1)$ tel que
$f(\bar{x}+v) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}+\tau v)$

Preuve:

Soit $\varphi(t) = f(\bar{x}+tv)$.
Les dérivées partielles secondes sont continues sur B, donc les dérivées partielles premières sont différentiables sur B. En particulier, elles y sont continues, donc f y est différentable. On pourra donc appliquer la dérivation des fonctions composées deux fois sur B (pour dériver deux fois la fonction $\varphi(t)$).

Calculons $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$. Comme $\varphi(t) = f(\bar{x}+tv) = f(\underbrace{\bar{x}_1+tv_1}_{x_1}, \underbrace{\bar{x}_2+tv_2}_{x_2}, ..., \underbrace{\bar{x}_n+tv_n}_{x_n})$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{d}{dt}[\, f(\bar{x}_1+tv_1, \bar{x}_2+tv_2, ..., \bar{x}_n+tv_n)\,] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv) . \frac{d(\bar{x}_1+tv_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv) . \frac{d(\bar{x}_2+tv_2)}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv) . \frac{d(\bar{x}_n+tv_n)}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv) . v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv) . v_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv) . v_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv) . v_i \, .
\end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) = \frac{d}{dt}(\varphi'(t)) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv) . v_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv)\right] . v_i \qquad \text{(dérivée d'une somme, } v_i \text{ indépendant de t)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1+tv_1, \bar{x}_2+tv_2, ..., \bar{x}_n+tv_n)\right] . v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv)\right) . v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv)\right) . v_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv)\right) . v_n\right] . v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv)\right) . v_j\right] . v_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}+tv)\right) . v_j v_i
\end{aligned}$$

Si l'on applique la formule de Mac Laurin à la fonction d'une variable $\varphi(t)$, on a:

$\varphi(t) = \varphi(0) + t.\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}.\varphi''(\tau)$ pour un τ de (0,t), ce qui donne, pour t = 1 :

$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}.\varphi''(\tau)$ pour un τ de (0,1).

En remplaçant $\varphi(1), \varphi(0), \varphi'(0)$ et $\varphi''(\tau)$ en fonction de ce qui précède, on obtient

$f(\bar{x}+v) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}+\tau v)$ pour un τ de (0,1).

Réponse question 5 a)

Théorème de Lagrange

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont C^1 au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, si f admet un extremum local en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, alors il existe un réel λ^* tel que $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda^* \nabla g(\bar{x},\bar{y})$ (autrement dit, alors il existe un réel λ^* tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$, avec $L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$).

Réponse question 5 b)

Condition suffisante « forte » :

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont C^2 au voisinage du point $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ et s'il existe λ^* : $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\bar{x},\bar{y},\lambda^*) = 0$ (avec $L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$), alors si $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\lambda^*)}$ est définie négative (définie positive), f présente un maximum (minimum) local en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0.

Réponse question 5 c)

On a f(x,y) = $e^{-x^2} - e^{-y^2}$ et g(x,y) = $4x^2 + y^2 - 4$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

Domaines de définition : $\text{dom } f = \text{dom } g = IR^2$

Classes : f et g sont C^∞ sur IR^2 (f est la différence de deux fonctions qui sont chacune la composée d'une fonction polynôme avec la fonction e^u et g est une fonction polynôme)

Posons $L(x,y;\lambda) = e^{-x^2} - e^{-y^2} - \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$

Condition nécessaire (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

Types de candidats : parmi les points de $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à $\text{dom } f \cap \text{dom } g$: néant car $\text{dom } f \cap \text{dom } g = IR^2$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas C^1 : néant car f et g sont C^∞ sur IR^2.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 8x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} 8x & 2y \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \text{ ssi } (x,y) = (0,0)$$

, mais (0,0) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x.e^{-x^2}-\lambda 8x=0 \\ 2y.e^{-y^2}-\lambda.2y=0 \\ -(4x^2+y^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x.(e^{-x^2}+4\lambda)=0 & (1) \\ 2y.(e^{-y^2}-\lambda)=0 & (2) \\ 4x^2+y^2-4=0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=-\frac{e^{-x^2}}{4}$

Si x = 0, par (3), $y^2=4 \Leftrightarrow y=-2$ ou $y=2$ et, par (2), $\lambda = e^{-4}$.

Si $\lambda=-\frac{e^{-x^2}}{4}$, par (2), y = 0 (puisque $e^{-y^2}+\frac{e^{-x^2}}{4}$ ne s'annule pas), donc, par (3),
$x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$ et, par consequent, $\lambda=-\frac{e^{-1}}{4}$.

On a donc quatre candidats :

(0,-2) et (0,-2) avec $\lambda^* = e^{-4}$.

(-1,0) et (1,0) avec $\lambda^* = -\frac{e^{-1}}{4}$

<u>Classement (par la condition suffisante « forte »)</u> : voir réponse question 5 b)

On a ici

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=-2.e^{-x^2}+4x^2.e^{-x^2}-8\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=2.e^{-y^2}-4y^2.e^{-y^2}-2\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(x,y,\lambda)}=\begin{pmatrix} -2.e^{-x^2}+4x^2.e^{-x^2}-8\lambda & 0 \\ 0 & 2.e^{-y^2}-4y^2.e^{-y^2}-2\lambda \end{pmatrix}$$

En (0,2) et (0,-2) avec $\lambda^* = e^{-4}$, on a $\begin{pmatrix} -2-8.e^{-4} & 0 \\ 0 & -16.e^{-4} \end{pmatrix}$. Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont égales à $-2-8.e^{-4}$ et $-16.e^{-4}$, donc toutes deux strictement négatives, donc la matrice est définie négative et la condition suffisante « forte » permet de conclure :

f(x,y) possède un maximum local en (0,2) et en (0,-2) sous la contrainte g(x,y) = 0.

En (-1,0) et (1,0) avec $\lambda^* = -\frac{e^{-1}}{4}$, on a $\begin{pmatrix} 4.e^{-1} & 0 \\ 0 & 2+\frac{e^{-1}}{2} \end{pmatrix}$. Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont égales à $4.e^{-1}$ et à $2+\frac{e^{-1}}{2}$, donc toutes deux strictement positives, donc la matrice est définie positive et la condition suffisante « forte » permet de conclure :

f(x,y) possède un minimum local en (1,0) et en (-1,0) sous la contrainte g(x,y) = 0.