Août 2017
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Définir : sous-ensemble **borné** de IR^n
boule **fermée** de IR^n (1 pt.)

b) Démontrer que toute boule fermée de IR^n est un ensemble fermé. (1.5 pt.)

c) Soient les sous-ensembles suivants de IR^2 :

$A = \{(x,y) \in IR^2 : y = |x|\}$; $B = IR^+ \times (-2,+\infty)$; $C = \{(x,y) \in IR^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\}$.

Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier avec précision les réponses des cases grisées.

	ouvert	fermé	borné	convexe
A	non	oui	non	non
B	non	non	non	oui
C	non	oui	oui	oui

(2.5 pts.)

2. Soit $f: D \subset IR^2 \to IR: (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (a_1, a_2)$, point intérieur de D.

a) Définir: **vecteur gradient** de f(x,y) en a (0.5 pt.)

b) Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1°) Etudier la continuité de la fonction f(x,y) en (0,0).

2°) Etudier la dérivabilité de f(x,y) **par rapport à x** en (0,0). (2.5 pts.)

3. a) Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** α ($\alpha \in IR$). (0.5 pt.)

b) Si $f: A \subset IR^n \to IR : x \to f(x)$ est différentiable et homogène sur A, que peut-on dire de ses dérivées partielles premières? Ne pas démontrer. (0.5 pt.)

c) Soit la fonction $h: IR^2 \to IR : (x,y) \to h(x,y)$ différentiable dans IR^2 et homogène de degré 3 dans IR^2. Soit $g(x,y) = y^p.h(x,y) + x^{3p-7}.\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$

Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) du paramètre p la fonction g est-elle homogène dans IR^2 ? Pour chaque valeur ainsi déterminée, quel est le degré d'homogénéité de g ?
Détailler et justifier soigneusement votre réponse. (2 pts.)

4. Soient $f: IR^n \to IR : x \to f(x)$ et $v \in IR^n$ tel que $\|v\| = 1$.

a) Quand dit-on que f est **dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v** ? (1 pt.)

b) Si f est différentiable en $\bar{x}$, démontrer que f est dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v en donnant l'expression de la dérivée directionnelle correspondante. (1.5 pt.)

5. Soient $n,m \in IN_0$.

a) Enoncer le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation d'une fonction de n+m variables soumise à m contraintes (cas général). Ne pas démontrer. (1 pt.)

b) Soient $f(x,y,z) = (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2$ et $g(x,y,z) = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-9$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extrema de f(x,y,z) sous la contrainte g(x,y,z) = 0. Classer ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s).

(3 pts.)

6. Déterminer (réponse finale uniquement)

a) l'expression complète de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial k}(t,k)$ de $F(t,k) = g\left(\underbrace{5k-f(t,k)}_{x},\underbrace{h(k)}_{y}\right)$ si g et f sont différentiables dans IR^2 et h est différentiable dans IR.

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial k}(t,k) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(5k-f(t,k),h(k)\right).(5-\frac{\partial f}{\partial k}(t,k)) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(5k-f(t,k),h(k)\right).h'(k)}$$

(0.5 pt.)

b) la solution générale de l'équation différentielle $y''' - y'' - y' + y = 7e^{-x}$.

$$\boxed{y = C_1.e^{x} + C_2.x.e^{x} + C_3.e^{-x} + \frac{7}{4}.x.e^{-x} \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in IR}$$

(1 pt.)

c) l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = (2x+y-5).e^{3x-5y}$ en le point (0,0).

$$\boxed{z = -13x + 26y - 5}$$

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

Un sous ensemble E de IR^n est **borné** ssi il est entièrement inclus à une boule ouverte centrée à l'origine.

On appelle **boule fermée** de IR^n de centre c et de rayon r > 0, l'ensemble $\overline{B}(c,r) \subset IR^n$ tel que

$$\overline{B}(c,r) = \{x \in IR^n : d(c,x) \leq r\}.$$

Réponse question 1 b)

Proposition **:** une boule fermée est un sous-ensemble fermé de IR^n

Preuve :

Soit $\overline{B}$ une boule fermée de IR^n, $(p_1,\ldots,p_m,\ldots)$ une suite convergente d'éléments de $\overline{B}$, soient c le centre de $\overline{B}$ et r son rayon.

Si $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p$, alors $\lim\limits_{m\to\infty} d(p_m,p) = 0$.

Or, $d(c,p) \leq d(c,p_m) + d(p_m,p) \leq r + d(p_m,p)$ $\forall m$ car tous les $p_m \in \overline{B}(c,r)$;

lorsque $m \to \infty$, le second membre tend vers r et, par conséquent, $d(c,p) \leq r$ ce qui prouve que $p \in \overline{B}(c,r)$. ■

Réponse question 1 c)

Soient les sous-ensembles suivants de IR^2 :

$$A = \{(x,y) \in IR^2 : y = |x|\} \text{ ; } B = IR^+ \times (-2,+\infty) \text{ ; } C = \{(x,y) \in IR^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\}.$$

Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier avec précision les réponses des cases grisées.

	ouvert	fermé	borné	convexe
A	non	oui	non	non
B	non	non	non	oui
C	non	oui	oui	oui

Justifications :

(1) A **n'est pas convexe** puisque, par exemple, les points (-1,1) et (1,1) appartiennent à A et $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$.

Cependant, $\lambda.(-1,1) + (1-\lambda).(1,1) = \frac{1}{2}.(-1,1) + (1-\frac{1}{2}).(1,1) = \frac{1}{2}.(-1,1) + \frac{1}{2}.(1,1) = (0,1) \notin A$.

(2) B **n'est pas fermé** puisque, par exemple, le point (2,-2) n'appartient pas à B mais lui est adhérent (puisque toute boule ouverte centré en ce point contient des points (2, -2+ε) avec $\varepsilon > 0$ qui sont des points de B).

(3) C **est borné** puisque, par exemple, la boule ouverte centrée en (1,-1) et de rayon 10 contient entièrement C.

Réponse question 2 a)

$f(x,y)$ possédant toutes ses dérivées partielles (premières) en le point a, on appelle **vecteur gradient** de $f(x,y)$ en le point a, le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$ noté $\text{grad}\, f(a)$ ou $\nabla f(a)$.

Réponse question 2 b)

On a f(x,y) = $\begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{si}\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si}\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$.

1°) Etude de la continuité de la fonction f(x,y) en (0,0)

La fonction f(x,y) est continue en (0,0) ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe dans IR et vaut f(0,0).

Or, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+3y^2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt[3]{x^2+y^2})$ = 0 (lim. fct. C° en (0,0)). On est donc en présence d'une indétermination 0/0.

Passons aux coordonnées polaires : en posant $\begin{cases} x=\rho.\cos\theta \\ y=\rho.\sin\theta \end{cases}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} \frac{\rho^2(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{\sqrt[3]{\rho^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})}} = \lim_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} \frac{\rho^2(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{\rho^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} \rho^{\frac{4}{3}}(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta).$$

Comme $0\leq\cos^2\theta\leq1$ et $0\leq\sin^2\theta\leq1$ quel que soit θ, on a, quel que soit θ,

$0\leq\rho^{\frac{4}{3}}(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta)\leq5\rho^{\frac{4}{3}}$. Comme $\lim\limits_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} 5\rho^{\frac{4}{3}} = \lim\limits_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} 0 = 0$, par le théorème du pincement, on a $\lim\limits_{\substack{\rho\to0 \\ \theta qcq}} \rho^{\frac{4}{3}}(2\cos^2\theta+3\sin^2\theta)=0$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ = 0.

Comme f(0,0) = 0, **la fonction f(x,y) est continue en (0,0)**.

2°) Etude de la dérivabilité de f(x,y) **par rapport à x** en (0,0).

Il faut calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2}}-0}{x} = \lim\limits_{x\to0} 2x^{\frac{1}{3}} = 0 \in \text{IR}$.

De là, f(x,y) est dérivable par rapport à x en (0,0) et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Réponse question 3 a)

Une fonction $f:IR^n \to IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de IR^n ssi

pour tout $x \in A$ et tout $t > 0$, $tx \in A$ et $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

-

Réponse question 3 b)

Si $f: A \subset IR^n \to IR$ est homogène de degré α sur A et différentiable $\forall\ x \in A$,
alors ses dérivées partielles premières sont homogènes de degré α-1 sur A

-

Réponse question 3 c)

On a g(x,y) = $y^p.h(x,y) + x^{3p-7}.\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ où h(x,y) est différentiable dans IR^2 et homogène de degré 3 dans IR^2.

On a $\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, t.(x,y) = (tx,ty) \in IR^2$.

Egalement, $\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, g(t.(x,y)) = g(tx,ty) = (ty)^p.h(t(x,y)) + (tx)^{3p-7}.\frac{\partial h}{\partial y}(t(x,y))$ [*]

Comme h est homogène de degré 3 dans IR^2, on a
$\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, h(t.(x,y)) = t^3.h(x,y)$ et comme h est de plus differentiable dans IR^2, on a, par la proposition énoncée au 3 b) ci-dessus, que les deux dérivées partielles premières de h sont homogènes de degré 2 dans IR^2, donc, notamment, $\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, \frac{\partial h}{\partial x}(t.(x,y)) = t^2.\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$.

En utilisant remplaçant dans [*], on obtient :

$\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, g(t.(x,y)) = t^p.y^p.t^3.h(x,y) + t^{3p-7}.x^{3p-7}.t^2.\frac{\partial h}{\partial y}(t(x,y))$ ou encore

$\forall (x,y) \in IR^2, \forall t > 0, g(t.(x,y)) = t^{p+3}.y^p.h(x,y) + t^{3p-5}.x^{3p-7}.\frac{\partial h}{\partial y}(t(x,y))$.

Pour que g soit homogène dans IR^2, il faut que p+3 = 3p-5, donc que **p = 4**.

Pour cette unique valeur de p pour laquelle g est homogène dans IR^2, le degré d'homogénéité de g est 7 (p+3 ou, de manière equivalent, 3p-5).

Réponse question 4 a)

Soient $f : IR^n \to IR : x \to f(x)$ et $v \in IR^n$ tel que $\|v\| = 1$.

On dit que $f : IR^n \to IR$ est **dérivable en x dans la direction v** ($\|v\| = 1$) ssi

$F(t) = f(x+tv)$ est définie au voisinage de 0 pour t et dérivable par rapport à t en t = 0. La dérivée de f dans la direction v en x est alors F'(0).

Réponse question 4 b)

Proposition **:** si $f:IR^n \to IR$ est différentiable en $\bar{x}$, si $\|v\| = 1$,

alors f est dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v et cette dérivée vaut

$$\left[\frac{df(\bar{x}+tv)}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).v_i = \langle v, \nabla f(\bar{x})\rangle$$

<u>Preuve</u> :

On applique à la fonction d'une variable

$F(t) = f(\bar{x}+tv) = f(\bar{x}_1+tv_1,\ \bar{x}_2+tv_2, \ldots,\ \bar{x}_n+tv_n)$ la règle de dérivation des fonctions composées :

$$F'(t) = \frac{df(\bar{x}+tv)}{dt} = \frac{d}{dt}[\, f(\bar{x}_1+tv_1,\ \bar{x}_2+tv_2, \ldots,\ \bar{x}_n+tv_n)\ ]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_1+tv_1)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_2+tv_2)}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_n+tv_n)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv)\,.v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv)\,.v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv)\,.v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv).v_i$$

De là, $F'(0) = \left[\frac{df(\bar{x}+tv)}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).v_i = \langle v, \nabla f(\bar{x})\rangle$.

Réponse question 5 a)

Soit f : $IR^{n+m} \to IR : x \to f(x)$ et $g_j : IR^{n+m} \to IR : x \to g_j(x)$, j = 1,...,m.

<u>Problème</u>: Maximiser (ou minimiser) f(x) sous les contraintes $g_j(x) = 0$, j = 1,...,m.

Soit le <u>lagrangien</u> du problème $L(x;\lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . g_j(x)$.

On a la ***condition nécessaire du premier ordre*** (théorème de **Lagrange**)

Si f et les g_j sont C^1 au voisinage de a, point intérieur de leurs domaines tel que $J_g(a)$ est de rang maximum, si f admet un extremum local en a sous les contraintes $g_j(x) = 0$,
alors il existe $\lambda^* \in IR^m$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda^*) = 0 \ \forall$ i = 1,...,n+m.

Réponse question 5 b)

On a f(x,y,z) = $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2$ et g(x,y,z) = $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 9$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y,z) sous la contrainte g(x,y,z) = 0.

<u>Domaines de définition</u> : $\text{dom } f = \text{dom } g = IR^3$

<u>Classes</u> :f et g sont C^∞ sur IR^3 (ce sont des fonctions polynômes)

Posons $L(x,y,z;\lambda) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 - \lambda((x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 9)$

<u>Condition nécessaire</u> (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

<u>Types de candidats</u> : parmi les points de $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à $\text{dom } f \cap \text{dom } g$: néant car $\text{dom } f \cap \text{dom } g = IR^3$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas C^1 : néant car f et g sont C^∞ sur IR^3.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2(x-2) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 2(y+1) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 2(z-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla g(x,y,z) = \left[2(x\text{-}2)\ 2(y\text{+}1)\ 2(z\text{-}2)\right] = [0 \ \ 0 \ \ 0] \text{ ssi } (x,y,z) = (2,-1,2),$$

mais (2,-1,2) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-2) - \lambda 2(x-2) = 0 \\ 2(y+1) - \lambda .2(y+1) = 0 \\ 2(z+2) - \lambda .2(z-2) = 0 \\ ((x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 9) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2(x-2)(1-\lambda) = 0 & (1) \\ 2(y+1)(1-\lambda) = 0 & (2) \\ 2((z+2) - \lambda .(z-2)) = 0 & (3) \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 9 = 0 & (4) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1$

Si $\lambda = 1$, par (3), on obtient 8 = 0, qui n'a pas de solution réelle. Donc, x = 2.

$(2) \Leftrightarrow y = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1$

Comme $\lambda = 1$ mène à une impossibilité, on a y = -1.

En remplaçant x par 2 et y par -1 dans (4), on obtient

$(z-2)^2 = 9 \Leftrightarrow z-2 = 3 \text{ ou } z-2 = -3 \Leftrightarrow z = 5 \text{ ou } z = -1.$

Si z = 5, par (3), $14 - \lambda.6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{3}$.

Si z = -1, par (3), $2 + \lambda.6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.

On a donc deux candidats : (2,-1,5) avec $\lambda^* = \frac{7}{3}$ et (2,-1,-1) avec $\lambda^* = -\frac{1}{3}$.

<u>Classement (par la condition suffisante « forte »)</u> :

Si f et g sont C^2 au voisinage du point a, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(a) \neq 0$ et s'il existe $\lambda^* : \frac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda^*) = 0 \forall i$, alors si $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(a,\lambda^*)}$ est définie négative (définie positive), f présente un maximum (minimum) local en a sous la contrainte g(x,y,z) = 0.

On a ici $\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z,\lambda) = 2(1-\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z,\lambda) = 2(1-\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z,\lambda) = 2(1-\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}(x,y,z,\lambda) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(x,y,z,\lambda)} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

En (2,-1,5) avec $\lambda^* = \frac{7}{3}$, on a $= \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont toutes trois égales à $-\frac{8}{3}$, donc toutes trois strictement négatives et la condition suffisante « forte » permet de conclure : **f(x,y) possède un maximum local en (2,-1,5) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

En (2,-1,-1) avec $\lambda^* = -\frac{1}{3}$, on a $= \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont toutes trois égales à $\frac{8}{3}$, donc toutes trois strictement positives et la condition suffisante « forte » permet de conclure : **f(x,y) possède un minimum local en (2-1,-1) sous la contrainte g(x,y) = 0**.