**A**

**Questions**

**1. a)** Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.
Définir : sous-ensemble **convexe** de $IR^n$. Que signifie géométriquement cette définition ? (1 pt.)

**b)** Soient les sous-ensembles suivants de $IR^2$ :

$$A = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\} \qquad \text{et} \qquad B = [-1,1] \times ]-2,1[ \quad .$$

Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier <u>avec précision</u> les réponses des cases grisées.

| | ouvert | fermé | borné | convexe |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| B | | | | |

Représenter avec précision l'ensemble C = A \ B (ou A – B).
Cet ensemble est-il convexe ? Justifier soigneusement. (3 pts.)

**2.** Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$, point intérieur de D.

**a)** Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi….
Que signifie géométriquement la notion de différentiabilité en un point d'une fonction de $IR^2 \to IR$ ?
(1 pt.)

**b)** Soit $f(x,y) = \begin{cases} e^{2y} + x & \text{si } y < 0 \\ -3x + 1 + \ln(1+x) & \text{si } y = 0 \\ y^2 & \text{si } y > 0 \end{cases}$.

Etudier la dérivabilité de f(x,y) par rapport à x et par rapport à y **<u>en (0,0)</u>**. (2.5 pts.)

**3. a)** Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** $\alpha$ $(\alpha \in IR)$. (0.5 pt.)

**b)** Soient les fonctions $f : IR^2 \to IR$ et $h : IR^2 \to IR$ telles que:

- f est différentiable et homogène de degré $\beta$ dans $IR^2$
- h est différentiable et homogène de degré $\lambda$ dans $IR^2$

Soit la fonction $w(p,q) = f(p.h(p,q), q^3)$.

1°) Déterminer, si possible, les valeurs réelles de $\beta$ et $\lambda$ pour lesquelles w est homogène de degré 1 dans $IR^2$ (détailler les calculs et justifier les étapes).

2°) Donner, <u>sans justification</u>, l'expression **<u>complète</u>** de $\frac{\partial w}{\partial p}(p,q)$ et de $\frac{\partial w}{\partial q}(p,q)$.
(2.5 pts.)

**4.** Enoncer et démontrer (en détaillant !) la **formule des accroissements finis** pour une fonction f de $IR^n \to IR$ différentiable au voisinage d'un point $\overline{x}$. (2 pts.)

**A**

**5.** Soient f : $D \subset IR^2 \to IR$ et g : $D \subset IR^2 \to IR$.

**a) Enoncer et démontrer** le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. (2.5 pt.)

**b) Expliquer** (en français !!) comment on interprète le multiplicateur de Lagrange dans le problème d'optimisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = c. (0.5 pt.)

**c)** Soient f(x,y) = $(x-1)^2 - (y+2)^2$ et g(x,y) = $(x-1)^2 + (y+2)^2 - 1$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0. Classer ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s). (3.5 pts.)

**6.** Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 2.y' - 3.y = 5.e^{-x}$.

| |
|---|
| |

(1 pt.)

**B**

**Questions**

**1. a)** Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Définir : sous-ensemble **convexe** de $IR^n$. Que signifie géométriquement cette définition ? (1 pt.)

**b)** Soient les sous-ensembles suivants de $IR^2$ :

$$A = ]-1,2[\times[-1,1] \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in IR^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$$

Compléter les cases du tableau suivant par « oui » ou « non ».
Justifier avec précision les réponses des cases grisées.

| | ouvert | fermé | borné | convexe |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| B | | | | |

Représenter avec précision l'ensemble C = B \ A (ou B – A).
Cet ensemble est-il convexe ? Justifier soigneusement. (3 pts.)

**2.** Soit $f:D \subset IR^2 \to IR: (x,y) \to f(x,y)$ et a = $(x_0, y_0)$, point intérieur de D.

**a)** Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi….

Que signifie géométriquement la notion de différentiabilité en un point d'une fonction de $IR^2 \to IR$ ?
(1 pt.)

**b)** Soit $f(x,y) = \begin{cases} e^{2x} + y & \text{si } x < 0 \\ -5y + 1 + \ln(1+y) & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Etudier la dérivabilité de f(x,y) par rapport à x et par rapport à y **en (0,0)**. (2.5 pts.)

**3. a)** Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** $\alpha$ $(\alpha \in IR)$. (0.5 pt.)

**b)** Soient les fonctions $g : IR^2 \to IR$ et $f : IR^2 \to IR$ telles que:

- g est différentiable et homogène de degré $\beta$ dans $IR^2$
- f est différentiable et homogène de degré $\lambda$ dans $IR^2$

Soit la fonction $v(p,q) = g(p^4, q.f(p,q))$.

1°) Déterminer, si possible, les valeurs réelles de $\beta$ et $\lambda$ pour lesquelles v est homogène de degré 1 dans $IR^2$ (détailler les calculs et justifier les étapes).

2°) Donner, sans justification, l'expression **complète** de $\frac{\partial v}{\partial p}(p,q)$ et de $\frac{\partial v}{\partial q}(p,q)$.
(2.5 pts.)

**4.** Enoncer et démontrer (en détaillant !) la **formule des accroissements finis** pour une fonction f de $IR^n \to IR$ différentiable au voisinage d'un point $\overline{x}$ (2 pts.)

**B**

**5.** Soient $f : D \subset IR^2 \to IR$ et $g : D \subset IR^2 \to IR$.

**a) Enoncer et démontrer** le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. (2.5 pt.)

**b) Expliquer** (en français !!) comment on interprète le multiplicateur de Lagrange dans le problème d'optimisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = c. (0.5 pt.)

**c)** Soient $f(x,y) = (x+3)^2 - (y-1)^2$ et $g(x,y) = (x+3)^2 + (y-1)^2 - 1$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0. Classer ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s). (3.5 pts.)

**6.** Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 4.y' - 5.y = 7.e^{-x}$.

| |
|---|
| |

(1 pt.)

**Réponse question 1 a)**

Un sous-ensemble A de $IR^n$ est **convexe** ssi $\forall x,y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in A$ .
Géométriquement, A est convexe s'il contient entièrement les segments de droites délimités par deux quelconques de ses points.

---

**Réponse question 1 b)**

**<u>VERSION A</u>**

On a $A = \{(x,y) \in IR^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\}$ et $B = [-1,1] \text{ x } ]-2,1[$ .

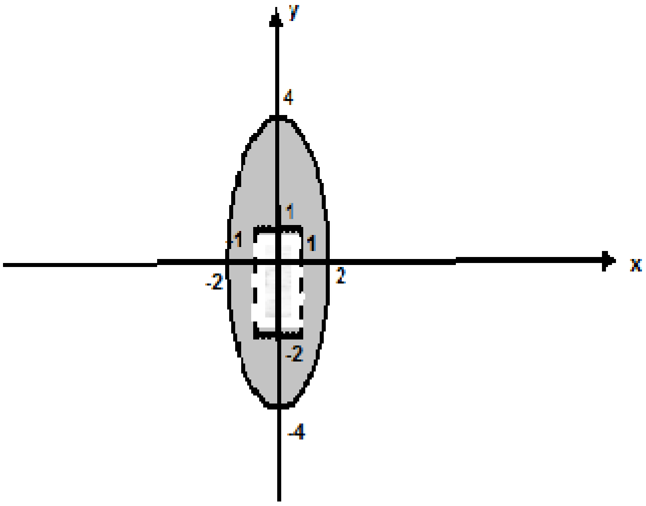
| | ouvert | fermé | borné | convexe |
|---|---|---|---|---|
| A | non | oui | oui | oui |
| B | non | non | oui | oui |

<u>Justifications</u> :

A est borné car la boule ouverte de centre (0,0) et de rayon 10, par exemple, contient entièrement A.

B n'est pas fermé car le point (0,1), par exemple, n'appartient pas à B, mais est adhérent à B puisque toute boule ouverte centrée en (0,1) contient inévitablement des points (0, 1-$\varepsilon$) avec $\varepsilon > 0$ et tel que 1-$\varepsilon$ > -2, donc, des points appartenant à B.

Graphiquement, l'ensemble C = A \ B :




<u>Légende</u> : lignes pointillées et zones blanches n'appartennent pas à C.

C n'est pas convexe. puisque les points P(-2,0) et Q(2,0), par exemple, appartiennent à C et $\lambda = \frac{1}{2}$ appartient à [0,1], mais $\lambda.P + (1-\lambda).Q = \frac{1}{2}.(-2,0) + \frac{1}{2}.(2,0) = (0,0)$ qui n'appartient pas à C.

**VERSION B**

On a  $A = \,]-1,2[\, x\, [-1,1]$  et  $B = \{(x,y) \in IR^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$ .

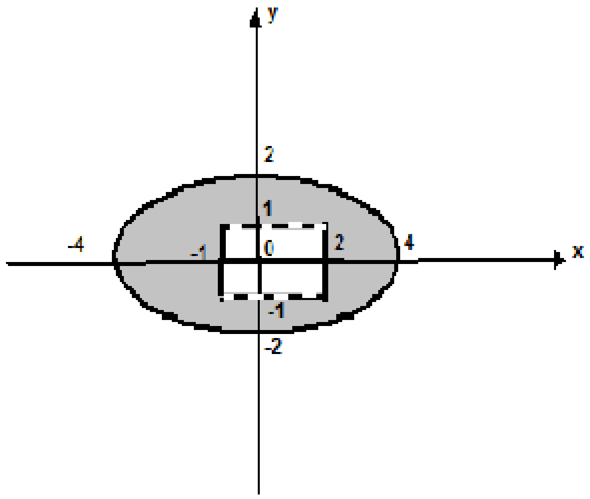
| | ouvert | fermé | borné | convexe |
|---|---|---|---|---|
| A | non | non | oui | oui |
| B | non | oui | oui | oui |

Justifications :

A n'est pas fermé car le point (2,0), par exemple, n'appartient pas à A, mais est adhérent à A puisque toute boule ouverte centrée en (2,0) contient inévitablement des points (2-$\varepsilon$ ,0) avec $\varepsilon > 0$ et tel que 2-$\varepsilon$ > -1, donc, des points appartenant à A.

B est borné car la boule ouverte de centre (0,0) et de rayon 10, par exemple, contient entièrement B.

Graphiquement, l'ensemble C = B \ A :




Légende : lignes pointillées et zones blanches n'appartiennent pas à C.

C n'est pas convexe. puisque les points P(0,-2) et Q(0,2), par exemple, appartiennent à C et $\lambda = \frac{1}{2}$ appartient à [0,1], mais $\lambda.P + (1-\lambda).Q = \frac{1}{2}.(0,-2) + \frac{1}{2}.(0,2) = (0,0)$ qui n'appartient pas à C.

**Réponse question 2 a)**

Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et a = $(x_0, y_0)$ point intérieur de D.

f est une fonction différentiable en a ssi

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|} = 0}$$

La notion de différentiabilité d'une fonction de $IR^2 \to IR$ en un point signifie géométriquement qu'il existe un plan tangent à la surface correspondante en ce point.

---

**Réponse question 2 b)**

**<u>VERSION A</u>**

On a f(x,y) = $\begin{cases} e^{2y} + x & \text{si } y < 0 \\ -3x + 1 + \ln(1+x) & \text{si } y = 0 \\ y^2 & \text{si } y > 0 \end{cases}$.

(1) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à x</u>** en (0,0)

On a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x+1+\ln(1+x)-(1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x+\ln(1+x)}{x}$.

Comme $\lim_{x\to 0}(-3x+\ln(1+x)) = 0$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$ (lim. fct C° en x = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de x = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim_{x\to 0} \frac{(-3x+\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{(-3+\frac{1}{1+x})}{1} = -2$ (lim. fct C° en x = 0) qui $\in \overline{IR} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ = -2.

Cette limite étant réelle, **la fonction est dérivable par rapport à x en (0,0) et** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2$ **.**

(2) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à y</u>** en (0,0)

On a $\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$. Etant donnée que la fonction f est définie différemment pour les y < 0 et les y > 0, il faut calculer séparément $\lim_{\substack{y\to 0 \\ <}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ et $\lim_{\substack{y\to 0 \\ >}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$.

On a $\lim_{\substack{y\to 0 \\ <}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ <}} \frac{e^{2y}-1}{y}$.

Comme $\lim_{\substack{y\to 0 \\ <}}(e^{2y}-1) = 0$ et $\lim_{\substack{y\to 0 \\ <}} y = 0$ (lim. fct C° en y = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de y = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\<}} \frac{(e^{2y}-1)'}{y'} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\<}} \frac{2e^{2y}}{1} = 2$ (lim. fct C° en y = 0) qui $\in \overline{IR} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{y\to 0\\<}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 2$.

On a $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}} \frac{y^2-1}{y}$.

Or, $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}}(y^2-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}} y = 0$ (lim. fct C° en y = 0), donc, le calcul de limite $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}} \frac{y^2-1}{y}$ aboutit sur un calcul dans $\overline{IR}$, $\frac{-1}{0}$ dont le numérateur est < 0 et le dénominateur est > 0, donnant donc comme résultat $-\infty$. Comme ce n'est pas un réel, $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\>}} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ n'existe pas dans IR, donc, $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ n'existe pas dans IR, donc, **f n'est pas dérivable par rapport à y en (0,0)**.

**<u>VERSION B</u>**

On a f(x,y) = $\begin{cases} e^{2x}+y & \text{si } x<0 \\ -5y+1+\ln(1+y) & \text{si } x=0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

(1) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à x</u>** en (0,0)

On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$. Etant donnée que la fonction f est définie différemment pour les x < 0 et les x > 0, il faut calculer séparément $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}(e^{2x}-1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} x = 0$ (lim. fct C° en x = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de x = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{(e^{2x}-1)'}{x'} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$ (lim. fct C° en x = 0) qui $\in \overline{IR} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 2$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{x^2-1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(x^2-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} x = 0$ (lim. fct C° en x = 0), donc, le calcul de limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{x^2-1}{x}$ aboutit sur un calcul dans $\overline{IR}$, $\frac{-1}{0}$ dont le numérateur est < 0 et le dénominateur est > 0, donnant donc comme résultat $-\infty$. Comme ce n'est pas un réel, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ n'existe pas dans IR, donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ n'existe pas dans IR, donc, **f n'est pas dérivable par rapport à x en (0,0)**.

(2) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à y</u>** <u>en (0,0)</u>

On a $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$. $=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-5y+1+\ln(1+y)-(1)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-5y+\ln(1+y)}{y}$ .

Comme $\lim\limits_{y\to 0}(-5y+\ln(1+y))=0$ et $\lim\limits_{y\to 0}y=0$ (lim. fct C° en y = 0), le calcul de cette limite aboutit à une forme indéterminée de type $\dfrac{0}{0}$. Comme les fonctions au numérateur et au dénominateur sont dérivables au voisinage de y = 0, on tente d'appliquer le théorème de de l'Hospital en évaluant

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(-5y+\ln(1+y))'}{y'}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(-5+\frac{1}{1+y})}{1}=-4$ (lim. fct C° en y = 0) qui $\in\overline{IR}\Rightarrow\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ = -4.

Cette limite étant réelle, **la fonction est dérivable par rapport à y en (0,0) et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-4$ .**

**Réponse question 3 a)**

Une fonction $f: IR^n \to IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de $IR^n$ ssi

pour tout $x \in A$ et tout $t > 0$ : $tx \in A$ et $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$.

---

**Réponse question 3 b)**

**<u>VERSION A</u>**

On a les fonctions $f : IR^2 \to IR$ et $h : IR^2 \to IR$ telles que:

- f est différentiable et homogène de degré $\beta$ dans $IR^2$
- h est différentiable et homogène de degré $\lambda$ dans $IR^2$

et la fonction $w(p,q) = f(p\,.\,h(p,q), q^3)$.

1°) Pour que w(p,q) soit homogène de degré 1 dans $IR^2$, il faut (et il suffit) que

$\forall (p,q) \in IR^2, \forall t > 0, t(p,q) \in IR^2$ (évident) et $w(t(p,q)) = t^1.w(p,q)$. On a

$$\begin{aligned}
w(t(p,q)) &= w(tp,tq) \\
&= f((tp)\,.\,h(tp,tq),(tq)^3) && \text{definition de w} \\
&= f(tp\,.\,h(t(p,q),t^3q^3) \\
&= f(tp\,.\,t^{\lambda}h(p,q),t^3q^3) && \text{puisque h est homogène de degré } \lambda \text{ dans } IR^2 \\
&= f(t^{\lambda+1}p.h(p,q),t^3q^3)
\end{aligned}$$

Pour pouvoir mettre en évidence une puissance de t (et utiliser l'homogénéité de f), il faut que

$$\lambda + 1 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Pour $\lambda = 2$, on a alors

$$\begin{aligned}
w(t(p,q)) &= f(t^3(p.h(p,q),q^3)) \\
&= (t^3)^{\beta} f(p.h(p,q),q^3) && \text{puisque f est homogène de degré } \beta \text{ dans } IR^2 \\
&= t^{3\beta}.f(p.h(p,q),q^3) \\
&= t^{3\beta}.w(p,q)
\end{aligned}$$

Pour que w soit homogène de degré 1 dans $IR^2$, on doit avoir $3\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$.

Par conséquent, **w(p,q) est homogène de degré 1 dans** $IR^2$ **ssi** $\lambda = 2$ **et** $\beta = \frac{1}{3}$

2°) On a $w(p,q) = f(\underbrace{p\,.\,h(p,q)}_{x},\underbrace{q^3}_{y})$

$$\frac{\partial w}{\partial p}(p,q) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(p.h(p,q),q^3\right).[h(p,q) + p.\frac{\partial h}{\partial p}(p,q)]$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial q}(p,q) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(p.h(p,q),q^3\right).p.\frac{\partial h}{\partial q}(p,q) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(p.h(p,q),q^3\right).3q^2.$$

**VERSION B**

On a les fonctions g : $IR^2 \to IR$ et f : $IR^2 \to IR$ telles que:

- g est différentiable et homogène de degré $\beta$ dans $IR^2$
- f est différentiable et homogène de degré $\lambda$ dans $IR^2$

et la fonction $v(p,q) = g(p^4, q.f(p,q))$ .

1°) Pour que v(p,q) soit homogène de degré 1 dans $IR^2$ , il faut (et il suffit) que

$\forall (p,q) \in IR^2, \forall t > 0, t(p,q) \in IR^2$ (évident) et $v(t(p,q)) = t^1.v(p,q)$. On a

$$
\begin{aligned}
v(t(p,q)) &= v(tp,tq) \\
&= g((tp)^4,(tq).f(tp,tq)) && \text{definition de v} \\
&= g(t^4p^4, tq.f(t(p,q))) \\
&= g(t^4p^4, tq.t^{\lambda}f(p,q)) && \text{puisque f est homogène de degré } \lambda \text{ dans } IR^2 \\
&= g(t^4p^4, t^{\lambda+1}.q.f(p,q))
\end{aligned}
$$

Pour pouvoir mettre en évidence une puissance de t (et utiliser l'homogénéité de g), il faut que

$$\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Pour $\lambda = 3$ , on a alors

$$
\begin{aligned}
v(t(p,q)) &= g(t^4(p^4, q.f(p,q))) \\
&= (t^4)^{\beta}.g(p^4, q.f(p,q)) && \text{puisque g est homogène de degré } \beta \text{ dans } IR^2 \\
&= t^{4\beta}.g(p^4, q.f(p,q)) \\
&= t^{4\beta}.v(p,q)
\end{aligned}
$$

Pour que v soit homogène de degré 1 dans $IR^2$ , on doit avoir $4\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}$ .

Par conséquent, **v(p,q) est homogène de degré 1 dans** $IR^2$ **ssi** $\lambda = 3$ **et** $\beta = \frac{1}{4}$

2°) On a $v(p,q) = g(\underbrace{p^4}_{x}, \underbrace{q.f(p,q)}_{y})$

$$\frac{\partial v}{\partial p}(p,q) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(p^4, q.f(p,q)\right).4p^3 + \frac{\partial g}{\partial y}\left(p^4, q.f(p,q)\right).q.\frac{\partial f}{\partial p}(p,q)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial q}(p,q) = \frac{\partial g}{\partial y}\left(p^4, q.f(p,q)\right).[f(p,q) + q.\frac{\partial f}{\partial q}(p,q)]$$

**Réponse question 4**

<u>Théorème (ou formule) des accroissements finis</u> pour une fonction f de $IR^n \rightarrow IR$ différentiable au voisinage d'un point $\overline{x}$

*Soit* $f: IR^n \rightarrow IR: x \rightarrow f(x)$ *differentiable sur une boule ouverte centrée en* $\overline{x}$ *et v (*$\in IR^n$), un accroissement donné à $\overline{x}$.

Alors, $\forall v \in IR^n, v \neq 0$ tel que $\overline{x} + v$ appartient encore à cette boule, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$f(\overline{x}+v) - f(\overline{x}) = \langle v, \nabla f(\overline{x}+\tau v)\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}+\tau v).$$

Autrement dit, il existe $\xi$ entre $\overline{x}$ et $\overline{x}+v$ tel que $f(\overline{x}+v) - f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$.

<u>Preuve:</u>

Soit $F(t) = f(\overline{x}+tv)$. Par les hypothèses posées (f est différentiable….), F(t) est dérivable sur [0,1], donc également continue sur [0,1].

On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis (pour les fonctions d'une variable) à la fonction F(t) sur l'intervalle [0,1] : il existe donc $\tau \in (0,1)$ tel que

$F(1) - F(0) = F'(\tau).(1-0) \Leftrightarrow F(1) - F(0) = F'(\tau)$.

On a immédiatement, $F(1) = f(\overline{x}+v)$ et $F(0) = f(\overline{x})$, d'où il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$f(\overline{x}+v) - f(\overline{x}) = F'(\tau).$$

Calculons F'(t). Comme $F(t) = f(\overline{x}+tv) = f(\underbrace{\overline{x}_1+tv_1}_{x_1}, \underbrace{\overline{x}_2+tv_2}_{x_2}, ...., \underbrace{\overline{x}_n+tv_n}_{x_n})$, les hypothèses permettent d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \text{On a } F'(t) &= \frac{d}{dt}[\, f(\overline{x}_1+tv_1, \overline{x}_2+tv_2, ...., \overline{x}_n+tv_n)\,] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}+tv) . \frac{d(\overline{x}_1+tv_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}+tv) . \frac{d(\overline{x}_2+tv_2)}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}+tv) . \frac{d(\overline{x}_n+tv_n)}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}+tv).v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}+tv).v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}+tv).v_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}+tv).v_i \end{aligned}$$

Par conséquent, $F'(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}+\tau v).v_i$ .

On peut donc conclure qu'il existe $\tau \in (0,1)$ tel que $f(\overline{x}+v) - f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}+\tau v)$.

**Réponse question 5 a)** **(Théorème de Lagrange)**

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont $C^1$ au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, si f admet un extremum local en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, alors il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda^* \nabla g(\bar{x},\bar{y})$ (autrement dit, alors il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$, avec $L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$).

<u>Preuve</u> :

*Hypothèses* : f et g sont $C^1$ au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de D (1)

$\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0 \Leftrightarrow (\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})) \neq (0,0)$. Supposons, par exemple, $\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ (2)

f(x,y) possède un extremum sous la contrainte g(x,y) = 0 $\Rightarrow g(\bar{x},\bar{y}) = 0$ (3)

*Thèse*: il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases}$.

Par l'hypothèse (2), l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda.\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ possède une solution unique $\lambda^*$.

Il reste à vérifier que ce $\lambda^*$ vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda.\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

Les hypothèses (1), (2) et (3) permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation g(x,y) = 0 au voisinage du point $(\bar{x},\bar{y})$ : dans ce voisinage, g(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ y = h(x) (notamment, $\bar{y} = h(\bar{x})$), où h est une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $\bar{x}$.

- Dans ce voisinage, g(x,h(x)) = 0.

En dérivant les deux membres de cette dernière égalité par rapport à x, on obtient
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x)).h'(x) = 0$, et, pour x = $\bar{x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [1]

- Aussi, f(x,y) possédant un extremum en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, on peut dire que la fonction d'une variable F(x) = f(x,h(x)) possède un extremum <u>libre</u> en $\bar{x}$, d'où F'($\bar{x}$) = 0 (condition nécessaire du premier ordre).

Or, F'(x) = $\frac{d}{dx}(f(x,h(x))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x)).h'(x)$, d'où

F'($\bar{x}$) = 0 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [2]

En prenant [2] - $\lambda^*$.[1] pour le réel unique $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$, on a

$(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}))$ - $\lambda^*.(\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x})) = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})) + (\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})).h'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ ce qui achève la démonstration.

**Réponse question 5 b)**

Le **multiplicateur de Lagrange** $\lambda^*$, dans le problème d'optimisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = c, s'interprète comme la variation marginale de l'optimum de la fonction f lorsque le « niveau » (c) de la contrainte g(x,y) = c augmente d'une unité.

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Réponse question 5 c)**

**<u>VERSION A</u>**

On a f(x,y) = $(x-1)^2-(y+2)^2$ et g(x,y) = $(x-1)^2+(y+2)^2-1$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

<u>Domaines de définition</u> : $\text{dom } f = \text{dom } g = \text{IR}^2$

<u>Classes</u> : f et g sont $C^\infty$ sur $\text{IR}^2$ (f et g sont des fonctions polynômes)

Posons $L(x,y;\lambda)=(x-1)^2-(y+2)^2-\lambda((x-1)^2+(y+2)^2-1)$

<u>Condition nécessaire</u> (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

<u>Types de candidats</u> : parmi les points de $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ : néant car $\text{dom } f \cap \text{dom } g = \text{IR}^2$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas $C^1$ : néant car f et g sont $C^\infty$ sur $\text{IR}^2$.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$ :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2(x-1)\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2(y+2)\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla g(x,y)=\left[2(x-1)\quad 2(y+2)\right]=[0\quad 0] \text{ ssi } (x,y)=(1,-2)$$

, mais (1,-2) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)-2\lambda(x-1)=0\\ -2(y+2)-2\lambda(y+2)=0\\ -((x-1)^2+(y+2)^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)(1-\lambda)=0 & (1)\\ -2(y+2)(1+\lambda)=0 & (2)\\ (x-1)^2+(y+2)^2-1=0 & (3)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } \lambda=1$

Si x = 1, par (3), $(y+2)^2=1\Leftrightarrow y+2=1 \text{ ou } y+2=-1\Leftrightarrow y=-1 \text{ ou } y=-3$.

Dans les deux cas, par (2), $\lambda=-1$.

Si $\lambda=1$, par (2), y = -2, donc, par (3), $(x-1)^2=1\Leftrightarrow x-1=1 \text{ ou } x-1=-1\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=0$.

On a donc quatre candidats :

(1,-1) et (1,-3) avec $\lambda^*$ = -1 ; (2,-2) et (0,-2) avec $\lambda^*$ = 1.

Classement (par la **conditions suffisante** de la **"Hessienne bordée"** relative à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0) :

Si f et g sont $C^2$ au voisinage de a, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(a) \neq 0$, et si il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,\lambda^*) = 0$, alors,

si dét $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(a,\lambda^*)} > 0$ (resp. $< 0$) ,

f présente en a un maximum (resp. minimum) local sous la contrainte g(x,y)=0.

On a ici $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = 2 - 2\lambda$ ; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = -2 - 2\lambda$ ; $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = 0$ et

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(y+2)$ .

On doit donc évaluer dét $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ en les 4 candidats.

Pour (1,-1) avec $\lambda^*$ = -1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16 et pour (1,-3) avec $\lambda^*$ = -1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16

d'où, **f(x,y) possède un minimum local en (1,-1) et en (1,-3) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

Pour (2,-2) avec $\lambda^*$ = 1, dét $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16 et pour (0,-2) avec $\lambda^*$ = 1, dét $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16

d'où, **f(x,y) possède un maximum local en (2,-2) et en (0,-2) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

**VERSION B**

On a f(x,y) = $(x+3)^2-(y-1)^2$ et g(x,y) = $(x+3)^2+(y-1)^2-1$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

Domaines de définition : $\text{dom } f = \text{dom } g = IR^2$

Classes : f et g sont $C^\infty$ sur $IR^2$ (f et g sont des fonctions polynômes)

Posons $L(x,y;\lambda)=(x+3)^2-(y-1)^2-\lambda((x+3)^2+(y-1)^2-1)$

Condition nécessaire (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

Types de candidats : parmi les points de $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ : néant car $\text{dom } f \cap \text{dom } g = IR^2$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas $C^1$ : néant car f et g sont $C^\infty$ sur $IR^2$.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$ :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2(x+3)\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2(y-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla g(x,y)=\left[2(x+3)\quad 2(y-1)\right]=[0\quad 0] \text{ ssi } (x,y)=(-3,1)$$, mais (-3,1) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2(x+3)-2\lambda(x+3)=0\\ -2(y-1)-2\lambda(y-1)=0\\ -((x+3)^2+(y-1)^2-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}2(x+3)(1-\lambda)=0 & (1)\\ -2(y-1)(1+\lambda)=0 & (2)\\ (x+3)^2+(y-1)^2-1=0 & (3)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x=-3 \quad \text{ou} \quad \lambda=1$

Si x = -3, par (3), $(y-1)^2=1\Leftrightarrow y-1=1 \text{ ou } y-1=-1\Leftrightarrow y=2 \text{ ou } y=0$.

Dans les deux cas, par (2), $\lambda=-1$.

Si $\lambda=1$, par (2), y = 1, donc, par (3), $(x+3)^2=1\Leftrightarrow x+3=1 \text{ ou } x+3=-1\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=-4$.

On a donc quatre candidats :

(-3,2) et (-3,0) avec $\lambda^*$ = -1 ; (-2,1) et (-4,1) avec $\lambda^*$ = 1.

Classement (par la **conditions suffisante** de la **"Hessienne bordée"** relative à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0) :

Si f et g sont $C^2$ au voisinage de a, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(a) \neq 0$, et si il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(a,\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,\lambda^*) = 0$, alors,

si $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(a,\lambda^*)} > 0$ (resp. $< 0$) ,

f présente en a un maximum (resp. minimum) local sous la contrainte g(x,y)=0.

On a ici $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = 2 - 2\lambda$ ; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = -2 - 2\lambda$ ; $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = 0$ et

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2(x+3)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(y-1)$.

On doit donc évaluer $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ en les 4 candidats.

Pour (-3,2) avec $\lambda^*$ = -1, $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16 et pour (-3,0) avec $\lambda^*$ = -1, $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = -16

d'où, **f(x,y) possède un minimum local en (-3,2) et en (-3,0) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

Pour (-2,1) avec $\lambda^*$ = 1, $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16 et pour (-4,1) avec $\lambda^*$ = 1, $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ = 16

d'où, **f(x,y) possède un maximum local en (-2,1) et en (-4,1) sous la contrainte g(x,y) = 0**.

**Réponse question 6**

**<u>VERSION A</u>**

la solution générale de l'équation différentielle $y''-2.y'-3.y=5.e^{-x}$.

$$\boxed{y=C_1.e^{-x}+C_2.e^{3x}-\frac{5}{4}x.e^{-x}\quad \forall C_1,C_2\in IR}$$

**<u>VERSION B</u>**

la solution générale de l'équation différentielle $y''-4.y'-5.y=7.e^{-x}$.

$$\boxed{y=C_1.e^{-x}+C_2.e^{5x}-\frac{7}{6}x.e^{-x}\quad \forall C_1,C_2\in IR}$$