A

Questions

1. a) Soit A, sous-ensemble non vide et borné de IR.

Définir: - **supremum et maximum** de A.
- **point intérieur** de A (1 pt.)

b) Démontrer qu'un intervalle ouvert de IR est un ensemble ouvert. (1.5 pt.)

c) Compléter les cases du tableau suivant par une valeur réelle si elle existe ou par $\nexists$ sinon. Justifier soigneusement les réponses des cases grisées du tableau.

A	Un majorant de A qui n'appartient pas à A	Sup A	un point intérieur de A	un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A
$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}} : n \in IN_0\right\}$				
$IR \setminus [0, \frac{1}{2}[$			(grisée)	
$\{x \in IN : 1 < \sqrt{x} \leq \frac{5}{2}\}$		(grisée)		

(3 pts.)

2. a) Définir : - suite réelle **croissante**
- suite réelle **bornée** (1 pt.)

b) Que peut-on dire de la limite d'une suite réelle croissante ? Ne pas démontrer. (1 pt.)

c) Soient $(u_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **croissante et bornée** et

$(v_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **décroissante et non bornée**.

Dans les phrases suivantes, remplacer **………………………..** par "**est parfois**", "**est toujours**" ou "**n'est jamais**". Justifier **une** réponse au choix.
(Pour une réponse « est toujours » ou « n'est jamais », justifier théoriquement, pour une réponse « est parfois », donner un exemple de chaque cas).

la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

la suite $(\frac{n}{v_n})_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

la suite $((-1)^n + u_n)_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

(2 pts.)

3. a) Définir : fonction **dérivable** en un point (0.5 pt.)

b) Enoncer la **condition nécessaire du premier ordre** relative aux extrema d'une fonction f(x). Ne pas démontrer. (0.5 pt.)

c) Soit f(x) = $\begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1°) Déterminer, en détaillant le raisonnement et/ou les calculs, le domaine de définition de f(x).

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f(x).

3°) Déterminer f '(x), la fonction dérivée de f(x).

4°) Déterminer les « candidats » extremum de f(x). Classer ceux-ci (maximum local, minimum local ou ni l'un, ni l'autre) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s).

(5 pts.)

A

4. Enoncer et démontrer (<u>en détaillant la démonstration</u> !) le **théorème de Rolle**.
En donner une interprétation géométrique (dessin <u>et</u> explication !!). (2 pts.)

5. Donner (réponse finale uniquement)

a) pour les points a (0,1) et b (4,3)

1°) les coordonnées du point m, milieu du segment [a,b]

2°) l'<u>équation</u> de la médiatrice M du segment [a,b]

3°) les coordonnées du point c de M dont l'abscisse vaut 4

4°) la distance entre les points m et c

(1 pt.)

b) les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial p}(p,w)$ et $\frac{\partial f}{\partial w}(p,w)$ de la fonction f(p,w) = $\frac{e^{-wp}}{p}$.

$\frac{\partial f}{\partial p}(p,w) =$

$\frac{\partial f}{\partial w}(p,w) =$

(1 pt.)

c) l'approximation de Taylor d'ordre 2 de f(x) = $e^{-2x} - 6\ln(1+x)$ au voisinage de a = 0 (approximation de Mac Laurin).

(0.5 pt.)

B

Questions

1. a) Soit A, sous-ensemble non vide et borné de IR.

Définir: - **supremum et maximum** de A.
- **point intérieur** de A (1 pt.)

b) Démontrer qu'un intervalle ouvert de IR est un ensemble ouvert. (1.5 pt.)

c) Compléter les cases du tableau suivant par une valeur réelle si elle existe ou par $\nexists$ sinon. Justifier soigneusement les réponses des cases grisées du tableau.

A	Un majorant de A qui n'appartient pas à A	Sup A	un point intérieur de A	un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A
$\{x \in IN : \frac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 3\}$				
$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+2}} : n \in IN_0\right\}$				
$IR \setminus]\frac{1}{2}, 2]$				

(3 pts.)

2. a) Définir : - suite réelle **décroissante**
- suite réelle **bornée** (1 pt.)

b) Que peut-on dire de la limite d'une suite réelle croissante ? <u>Ne pas démontrer</u>. (1 pt.)

c) Soient $(u_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **croissante et non bornée** et

$(v_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **décroissante et bornée**.

Dans les phrases suivantes, remplacer **………………………..** par "**est parfois**", "**est toujours**" ou "**n'est jamais**". Justifier **une** réponse au choix.
(Pour une réponse « est toujours » ou « n'est jamais », justifier théoriquement, pour une réponse « est parfois », donner un exemple de chaque cas).

la suite $(\frac{n}{u_n})_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

la suite $((-1)^n + v_n)_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **……………………………………..** convergente

(2 pts.)

3. a) Définir : fonction **dérivable** en un point (0.5 pt.)

b) Enoncer la **condition nécessaire du premier ordre** relative aux extrema d'une fonction f(x).
<u>Ne pas démontrer</u>. (0.5 pt.)

c) Soit f(x) = $\begin{cases} 6x + 3x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{5x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1°) Déterminer, en détaillant le raisonnement et/ou les calculs, le domaine de définition de f(x).

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f(x).

3°) Déterminer f '(x), la fonction dérivée de f(x).

4°) Déterminer les « candidats » extremum de f(x). Classer ceux-ci (maximum local, minimum local ou ni l'un, ni l'autre) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s).

(5 pts.)

B

4. Enoncer et démontrer (en détaillant la démonstration !) le **théorème de Rolle**.
En donner une interprétation géométrique (dessin et explication !!). (2 pts.)

5. Donner (réponse finale uniquement)

a) les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}(t,w)$ et $\frac{\partial f}{\partial w}(t,w)$ de la fonction f(t,w) = $\frac{e^{-tw}}{w}$.

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,w) =$	$\frac{\partial f}{\partial w}(t,w) =$

(1 pt.)

b) l'approximation de Taylor d'ordre 2 de f(x) = $e^{-4x} - 2\ln(1+x)$ au voisinage de a = 0 (approximation de Mac Laurin).

(0.5 pt.)

c) pour les points a (1,4) et b (5,2)

1°) les coordonnées du point m, milieu du segment [a,b]

2°) l'équation de la médiatrice M du segment [a,b]

3°) les coordonnées du point c de M dont l'abscisse vaut -1

4°) la distance entre les points m et c

(1 pt.)

Réponse question 1 a)

Comme A est un ensemble majoré, il possède un et un seul plus petit majorant : le **supremum** de A.

Le réel m est un **maximum** de A ssi m est supremum de A et $m \in A$.

Un point a de A est dit **intérieur** à A ssi il existe un intervalle ouvert non vide centré en a entièrement inclus dans A.

Réponse question 1 b)

un intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ ***(avec*** $\alpha,\beta \in IR$, $\alpha < \beta$***) est un ensemble ouvert***

<u>Preuve</u>

Montrons que tout point de $]\alpha,\beta[$ lui est intérieur.

Soit $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Posons d, le minimum des distances entre γ et α et entre γ et β, soit

$$d = \min \{|\alpha-\gamma|, |\gamma-\beta|\}.$$

L'intervalle $]\gamma-d, \gamma+d[$ est un intervalle ouvert non vide, centré en γ, entièrement inclus dans $]\alpha,\beta[$.

De là, γ est un point intérieur de $]\alpha,\beta[$ et $]\alpha,\beta[$ est donc un ensemble ouvert.

Réponse question 1 c)

<u>VERSION A</u>

A	**Un majorant de A qui n'appartient pas à A**	**Sup A**	**un point intérieur de A**	**un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A**
$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}} : n \in IN_0\right\}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nexists$	0
$IR \setminus [0,\frac{1}{2}[$	$\nexists$	$\nexists$	5	0
$\{x \in IN : 1 < \sqrt{x} \le \frac{5}{2}\}$	10	6	$\nexists$	$\nexists$

Justification de « 5 est un point intérieur de A = $IR \setminus [0,\frac{1}{2}[$ » :

L'ensemble A = $IR \setminus [0,\frac{1}{2}[\; = \;]-\infty,0[\cup [\frac{1}{2},+\infty[$. L'intervalle] 4,6 [est un intervalle ouvert non vide centré en 5 et entièrement inclus dans A. De là, 5 est un point intérieur de A.

Justification de « le supremum de A = $\{x \in IN : 1 < \sqrt{x} \le \frac{5}{2}\}$ est 6 » :

L'ensemble A = $\{x \in IN : 1 < \sqrt{x} \le \frac{5}{2}\}$ = { 2, 3, 4, 5, 6 }.

L'ensemble de tous les majorants de A est $[6,+\infty[$.

Le plus petit de ces majorants, le supremum de A, est donc 6.

VERSION B

A	Un majorant de A qui n'appartient pas à A	Sup A	un point intérieur de A	un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A
$\{x \in IN : \frac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 3\}$	11	8	$\nexists$	$\nexists$
$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+2}} : n \in IN_0\right\}$	4	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nexists$	0
$IR \setminus]\frac{1}{2}, 2]$	$\nexists$	$\nexists$	10	2

Justification de « le supremum de A = $\{x \in IN : \frac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 3\}$ est 8 » :

L'ensemble A = $\{x \in IN : \frac{3}{2} < \sqrt{x} \leq 3\}$ = { 3, 4, 5, 6, 7, 8 }.

L'ensemble de tous les majorants de A est $[8, +\infty[$.

Le plus petit de ces majorants, le supremum de A, est donc 8.

Justification de « 10 est un point intérieur de A = $IR \setminus]\frac{1}{2}, 2]$ » :

L'ensemble A = $IR \setminus]\frac{1}{2}, 2]$ = $]-\infty, \frac{1}{2}] \cup]2, +\infty[$. L'intervalle] 9,11 [est un intervalle ouvert non vide centré en 10 et entièrement inclus dans A. De là, 10 est un point intérieur de A.

Réponse question 2 a)

VERSION A

La suite $(u_n)_{n\in IN_0}$ est **croissante** ssi $\forall$ n $\in$ IN_0, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in IN_0}$ est **bornée** ssi il existe deux nombres réels c et d tels que

$$\forall\ n \in IN_0 : c \leq u_n \leq d.$$

VERSION B

La suite $(u_n)_{n\in IN_0}$ est **décroissante** ssi $\forall$ n $\in$ IN_0, $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in IN_0}$ est **bornée** ssi il existe deux nombres réels c et d tels que

$$\forall\ n \in IN_0 : c \leq u_n \leq d.$$

Réponse question 2 b)

La limite d'une suite réelle croissante existe toujours dans $\overline{IR}$.

En effet, si une suite $(u_n)_{n\in IN_0}$ est croissante, si elle est majorée elle converge vers son supremum (et sa limite est réelle !), sinon sa limte vaut $+\infty$ (et elle ne converge pas!).

Réponse question 2 c)

VERSION A

$(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle **croissante et bornée** et

$(v_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **décroissante et non bornée**.

la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **… n'est jamais …..** convergente

la suite $(\frac{n}{v_n})_{n\in IN_0}$ **… est parfois...** convergente

la suite $((-1)^n + u_n)_{n\in IN_0}$ **… n'est jamais ….** convergente

Justification de « la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **… n'est jamais …..** convergente » :

Comme $(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle croissante et bornée, donc croissante et majorée, elle converge (vers son supremum). **Sa limite est donc réelle**.

Comme $(v_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle décroissante et non bornée, donc décroissante et non minorée, **sa limite est $-\infty$.**

De là, le calcul de la limite de la suite $(u_n + v_n)$ est un calcul dans $\overline{IR}$ (un réel + ($-\infty$)) donnant comme résultat $-\infty$**.** Par conséquent, la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **diverge toujours** (donc ne converge jamais).

VERSION B

$(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle **croissante et non bornée** et

$(v_n)_{n\in IN_0}$, une suite réelle **décroissante et bornée**.

la suite $(\frac{n}{u_n})_{n\in IN_0}$ **… est parfois...** convergente

la suite $((-1)^n + v_n)_{n\in IN_0}$ **… n’est jamais ….** convergente

la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **… n’est jamais …..** convergente

Justification de « la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **… n’est jamais …..** convergente » :

Comme $(u_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle croissante et non bornée, donc croissante et non majorée, **sa limite est $+\infty$.**

Comme $(v_n)_{n\in IN_0}$ est une suite réelle décroissante et bornée, donc décroissante et minorée, elle converge (vers son infimum). **Sa limite est donc réelle**.

De là, le calcul de la limite de la suite $(u_n + v_n)$ est un calcul dans $\overline{IR}$ (($+\infty$)+un réel) donnant comme résultat $+\infty$**.** Par conséquent, la suite $(u_n + v_n)_{n\in IN_0}$ **diverge toujours** (donc ne converge jamais).

Réponse question 3 a)

Soit f: D $\rightarrow$ IR: x $\rightarrow$ f(x) et a, un point intérieur de D.

f est **dérivable** en a ssi $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans IR.

Réponse question 3 b)

Condition nécessaire du premier ordre :

Soit f: D $\rightarrow$ IR: x$\rightarrow$ f(x) et a, un point intérieur de D.
Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a, alors f '(a) = 0.

Réponse question 3 c)

VERSION A

On a f(x) = $\begin{cases} x^2+4x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{2x}{\ln x} & \text{si } x>0 \end{cases}$.

1°) En ce qui concerne les $x\le 0$, f(x) = x^2+4x et il n'y a pas de condition d'existence, donc,

f(x) est définie sur $]-\infty,0]$.

En ce qui concerne les x > 0, f(x) = $\dfrac{2x}{\ln x}$ et on a les conditions d'existence

x > 0 (existence de ln), qui est vérifiée et $\ln x\ne 0$ (dénominateur) $\Leftrightarrow x\ne 1$, donc

f(x) est définie sur $]0,+\infty[\ \backslash\ \{1\}$.

Par conséquent, le domaine de définition de f(x) est $IR\backslash\{1\}$.

2°) Etude de la continuité et de la dérivabilité de f(x)

a) Dans l'ouvert $]-\infty,0[$, f(x) = x^2+4x, fonction polynôme, donc continue et dérivable dans IR.

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]-\infty,0[$.

b) Dans l'ouvert $]0,+\infty[\ \backslash\ \{1\}$, f(x) = $\dfrac{2x}{\ln x}$.

$\dfrac{2x}{\ln x}$ est le quotient

- d'une fonction polynôme 2x, continue et dérivable dans IR et
- de ln x, continue et dérivable dans IR_0^+.

La fonction $\dfrac{2x}{\ln x}$ est donc continue et dérivable dans IR_0^+ sauf en x = 1 où le dénominateur s'annule..

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]0,+\infty[\ \backslash\ \{1\}$.

c) Etude de la continuité de f(x) en x = 0

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x^2+4x) = 0^2+4.0$ (limite d'une fonction continue en x = 0) = 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2x}{\ln x}.$$

On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x = 0$ (limite d'une fonction continue en x = 0) et $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ (limite « connue »)

Dès lors, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2x}{\ln x}$ résulte en l'opération « $\frac{0}{-\infty}$ » qui est un calcul dans $\overline{IR}$ et vaut 0.

Comme $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ existent dans IR et valent 0, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe dans IR et vaut 0.

Or, f(0) = 0, d'où **la fonction f(x) est continue en x = 0**.

De a), b) et c), **la fonction f(x) est continue dans son domaine de définition** $IR \setminus \{1\}$.

En ce qui concerne la dérivabilité, par a) et b), on sait que f(x) est dérivable dans $IR \setminus \{0,1\}$ au moins (et certainement non dérivable en 1!!).

d) Etude de la dérivabilité de f(x) en x = 0

On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{(x^2+4x)-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x.(x+4)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} (x+4)$ = 0 + 4 (lim.fct.C° en x = 0) = 4.

Comme cette valeur est réelle, **f(x) est dérivable à gauche en x = 0 et f '$_g$ (0) = 4.**

On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{2x}{\ln x}-0}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{\ln x}.$

On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2 = 2$ (limite d'une fonction constante) et $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ (limite « connue »)

Dès lors, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{\ln x}$ résulte en l'opération « $\frac{2}{-\infty}$ » qui est un calcul dans $\overline{IR}$ et vaut 0.

Par conséquent, f(x) est dérivable à droite en x = 0 et f '$_d$ (0) = 0.

Comme f '$_g$ (0) et f '$_d$ (0) sont différentes,

la fonction f(x) n'est pas dérivable en x = 0.

3°) En utilisant les règles de dérivation dans $]-\infty,0[$ pour (x^2+4x) et dans $]0,+\infty[\ \setminus \{1\}$ pour $\frac{2x}{\ln x}$, la fonction dérivée de f(x) est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(\ln x - 1)}{\ln^2 x} & \text{si } x > 0 \\ & \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

4°) Recherche des extrema de f(x)

Les "candidats" extremum de f sont, parmi les points de dom f,

a) les éventuels points critiques de f(x) : il y en a deux : x = -2 et x = e ;
b) les éventuels points en lesquels f(x) n'est pas dérivable : il y en a un seul x = 0 ;
c) les éventuels points qui ne sont pas intérieurs à dom f : il n'y en a pas ici puisque le domaine de définition de f est ouvert.

On a le théorème suivant :

Si f(x) est continue en a et s'il existe un $\eta > 0$ tel que

$\forall\ x \in (a-\eta,a) \cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) ≥ 0 (≤ 0) et
$\forall\ x \in (a,a+\eta) \cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) ≤ 0 (≥ 0)

Alors, f(x) possède un maximum (minimum) local en a.

Comme la fonction étudiée ici est continue dans dom f et dérivable dans dom f sauf au point x = 0, l'étude du signe de f '(x) au voisinage des points candidats extremum nous permettra d'étudier la croissance de f(x) et de conclure.

x		-2		0		1		e	
f '(x)	-	0	+	$\nexists$	-	$\nexists$	-	0	+

Le théorème cité ci-dessus nous permet d'affirmer que la fonction étudiée possède un **maximum local en x = 0** de valeur **0**, un **minimum local en x = -2** de valeur **-4** et un **minimum local en x = e** de valeur **2e**

VERSION B

On a $f(x) = \begin{cases} 6x+3x^2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{5x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1°) En ce qui concerne les $x \le 0$, f(x) = $6x+3x^2$ et il n'y a pas de condition d'existence, donc,

f(x) est définie sur $]-\infty,0]$.

En ce qui concerne les x > 0, f(x) = $\dfrac{5x}{\ln x}$ et on a les conditions d'existence

x > 0 (existence de ln), qui est vérifiée et $\ln x \ne 0$ (dénominateur) $\Leftrightarrow x \ne 1$, donc

f(x) est définie sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$.

Par conséquent, le domaine de définition de f(x) est $IR \setminus \{1\}$.

2°) <u>Etude de la continuité et de la dérivabilité de f(x)</u>

a) Dans l'ouvert $]-\infty,0[$, f(x) = $6x+3x^2$, fonction polynôme, donc continue et dérivable dans IR.

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]-\infty,0[$.

b) Dans l'ouvert $]0,+\infty[\setminus \{1\}$, f(x) = $\dfrac{5x}{\ln x}$.

$\dfrac{5x}{\ln x}$ est le quotient

- d'une fonction polynôme 5x, continue et dérivable dans IR et
- de ln x, continue et dérivable dans IR_0^+.

La fonction $\dfrac{5x}{\ln x}$ est donc continue et dérivable dans IR_0^+ sauf en x = 1 où le dénominateur s'annule..

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]0,+\infty[\setminus \{1\}$.

c) Etude de la continuité de f(x) en x = 0

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (6x+3x^2) = 6.0+3.0^2$ (limite d'une fonction continue en x = 0) = 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{5x}{\ln x}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 5x = 0$ (limite d'une fonction continue en x = 0) et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ (limite « connue »)

Dès lors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{5x}{\ln x}$ résulte en l'opération « $\dfrac{0}{-\infty}$ » qui est un calcul dans $\overline{IR}$ et vaut 0.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ existent dans IR et valent 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe dans IR et vaut 0.

Or, f(0) = 0, d'où **la fonction f(x) est continue en x = 0**.

De a), b) et c), **la fonction f(x) est continue dans son domaine de définition** $IR \setminus \{1\}$.

En ce qui concerne la dérivabilité, par a) et b), on sait que f(x) est dérivable dans $IR \setminus \{0,1\}$ au moins (et certainement non dérivable en 1!!).

d) Etude de la dérivabilité de f(x) en x = 0

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{(6x+3x^2)-0}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{3x.(2+x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} 3(2+x) = 3(2+0)$ (lim.fct.C° en x = 0) = 6.

Comme cette valeur est réelle, **f(x) est dérivable à gauche en x = 0 et f '$_g$ (0) = 6.**

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\frac{5x}{\ln x}-0}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{5}{\ln x}$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} 5 = 5$ (limite d'une fonction constante) et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x = -\infty$ (limite « connue »)

Dès lors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{5}{\ln x}$ résulte en l'opération « $\frac{5}{-\infty}$ » qui est un calcul dans $\overline{IR}$ et vaut 0.

Par conséquent, f(x) est dérivable à droite en x = 0 et f '$_d$ (0) = 0.

Comme f '$_g$ (0) et f '$_d$ (0) sont différentes,

la fonction f(x) n'est pas dérivable en x = 0.

3°) En utilisant les règles de dérivation dans $]-\infty,0[$ pour $(6x+3x^2)$ et dans $]0,+\infty[\setminus \{1\}$ pour $\frac{5x}{\ln x}$, la fonction dérivée de f(x) est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 6+6x & \text{si } x<0 \\ \frac{5(\ln x-1)}{\ln^2 x} & \text{si } x>0 \\ & x \neq 1 \end{cases}.$$

4°) Recherche des extrema de f(x)

Les "candidats" extremum de f sont, parmi les points de dom f,

a) les éventuels points critiques de f(x) : il y en a deux : x = -1 et x = e ;
b) les éventuels points en lesquels f(x) n'est pas dérivable : il y en a un seul x = 0 ;
c) les éventuels points qui ne sont pas intérieurs à dom f : il n'y en a pas ici puisque le domaine de définition de f est ouvert.

On a le théorème suivant :

Si f(x) est continue en a et s'il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall$ x $\in$ (a-η,a) $\cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) ≥ 0 (≤ 0) et $\forall$ x $\in$ (a,a+η) $\cap$ dom f, f est dérivable en x et f '(x) ≤ 0 (≥ 0) Alors, f(x) possède un maximum (minimum) local en a.

Comme la fonction étudiée ici est continue dans dom f et dérivable dans dom f sauf au point x = 0, l'étude du signe de f '(x) au voisinage des points candidats extremum nous permettra d'étudier la croissance de f(x) et de conclure.

x		-1		0		1		e	
f '(x)	-	0	+	$\nexists$	-	$\nexists$	-	0	+

Le théorème cité ci-dessus nous permet d'affirmer que la fonction étudiée possède un

maximum local en x = 0 de valeur **0**, un **minimum local en x = -1** de valeur **-3** et un **minimum local en x = e** de valeur **5e**.

Réponse question 4

Le <u>théorème de Rolle</u> :

Si $f : [a,b] \to IR$ est continue dans [a,b] et dérivable dans (a,b) et si f(a) = f(b),
alors il existe c $\in (a,b)$: f '(c) = 0.

Preuve :

Comme f est continue sur [a,b], elle y possède un maximum global M et un minimum global m.

Si M = m, la fonction est constante et sa dérivée est nulle en tout point c de (a,b).

Si $M \neq m$, l'un des deux n'est ni en a, ni en b (puisque f(a) = f(b)) et donc se présente en un point c de (a,b). Supposons qu'il s'agit du maximum de f.

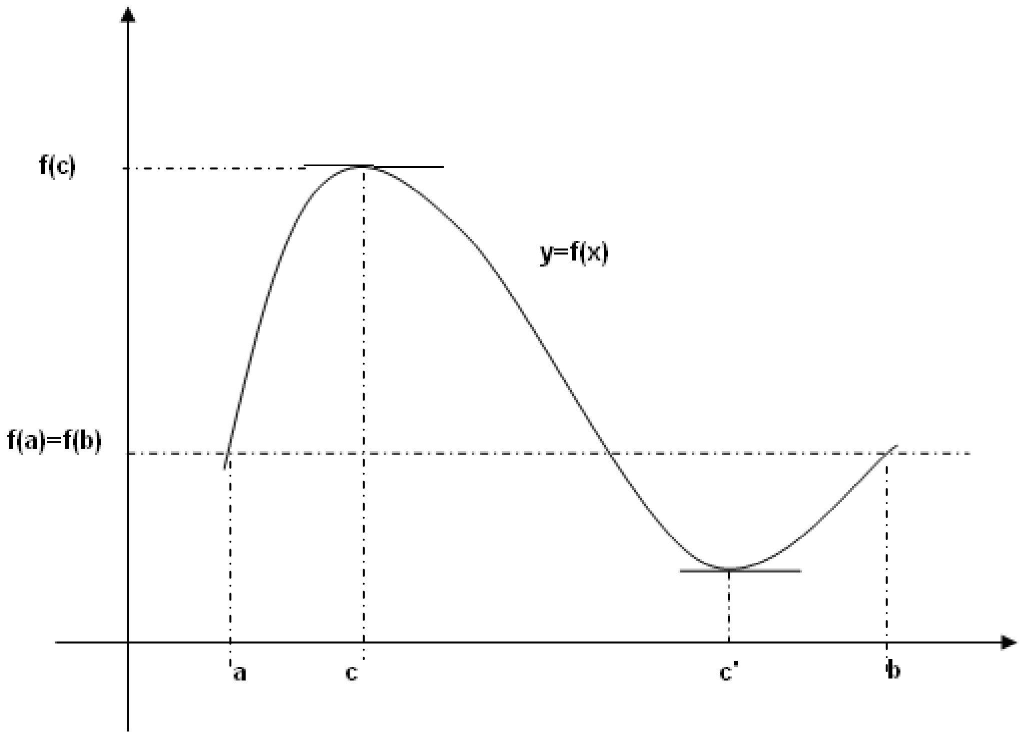
Comme f possède un maximum en c, $f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x)-f(c) \leq 0 \quad \forall x$ au voisinage de c.

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, qui existe pour x < c et x > c, est donc de signe différent à gauche et à droite de c puisque x - c change de signe en c.

Ce taux d'accroissement est ≥ 0 à gauche de c et ≤ 0 à droite de c.

La fonction f étant dérivable en c, elle est dérivable à gauche et à droite en c et, par prolongation des inégalités à la limite, les dérivées à gauche et à droite de f en c sont de signes différents : $f_g'(c) \geq 0$ et $f_d'(c) \leq 0$.
Mais comme elles sont égales (et leur valeur commune est f '(c)), f '(c) = 0.

<u>Interprétation géométrique</u>



Si les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées pour une fonction f définie sur un intervalle [a,b] (f continue sur [a,b], dérivable sur (a,b) et f(a) = f(b)), alors il existe au moins un point c entre a et b tel que la tangente au graphe de la fonction y = f(x) en son point d'abscisse c est horizontale.

Réponse question 5

VERSION A

a) pour les points a (0,1) et b (4,3)

1°) les coordonnées du point m, milieu du segment [a,b] $\boxed{(2,2)}$

2°) l'équation de la médiatrice M du segment [a,b] $\boxed{y=-2x+6}$

3°) les coordonnées du point c de M dont l'abscisse vaut 4 $\boxed{(4,-2)}$

4°) la distance entre les points m et c $\boxed{2\sqrt{5}}$

b) les dérivéee partiellee $\frac{\partial f}{\partial p}(p,w)$ et $\frac{\partial f}{\partial w}(p,w)$ de la fonction f(p,w) = $\frac{e^{-wp}}{p}$.

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p}(p,w)= \frac{-e^{-wp}(wp+1)}{p^2}}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial w}(p,w)= -e^{-wp}}$

c) l'approximation de Taylor d'ordre 2 de f(x) = $e^{-2x}-6\ln(1+x)$ au voisinage de a = 0 (approximation de Mac Laurin).

$\boxed{1-8x+5x^2}$

VERSION B

a) les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}(t,w)$ et $\frac{\partial f}{\partial w}(t,w)$ de la fonction f(t,w) = $\frac{e^{-tw}}{w}$.

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(t,w)=-e^{-tw}}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial w}(t,w)= \frac{-e^{-tw}(tw+1)}{w^2}}$

(1 pt.)

b) l'approximation de Taylor d'ordre 2 de f(x) = $e^{-4x}-2\ln(1+x)$ au voisinage de a = 0 (approximation de Mac Laurin).

$\boxed{1-6x+9x^2}$

(0.5 pt.)

c) pour les points a (1,4) et b (5,2)

1°) les coordonnées du point m, milieu du segment [a,b] $\boxed{(3,3)}$

2°) l'équation de la médiatrice M du segment [a,b] $\boxed{y=2x-3}$

3°) les coordonnées du point c de M dont l'abscisse vaut -1 $\boxed{(-1,-5)}$

4°) la distance entre les points m et c $\boxed{4\sqrt{5}}$